2019 年 7 月 14 日 実施

2020 年度 (夏季)

理学研究科博士課程 前期課程 数学専攻 入学試験問題

(数 学)

[注意] * 合図があるまでこのページをめくらないこと.

- 配られたすべての解答用紙に受験番号を記入せよ.
- **線形代数の問題 ([1], [2]) から 1 題, 微分積分の問題 ([3], [4]) から 1 題, 専門科目の問題 ([5]∼[9]) の中から 1 題の, 計 3 題を選んで解答せよ.**
- 解答はすべて解答用紙に記入し, 問題ごとに解答用紙 1 枚を使用せよ.
- 解答用紙が 3 枚配られていることを確認せよ. そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ.
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ.

線形代数

[1] a を複素数とするとき, 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -a \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ.

(i) A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ.

(ii) $a = 1$ のとき, A は対角化可能であることを示せ. また, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P および $P^{-1}AP$ を求めよ.

(iii) A が対角化可能であるための a の条件を求めよ.

(iv) A が対角化可能でないとき, $\mathbb{C}^3$ の部分空間

$$W = \{A\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3 \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3\}$$

の次元と基底を求めよ. ただし, $\mathbb{C}$ は複素数体を表す.

[2] 実 3 次元ベクトル $\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$V = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{m}) = 0\}$$

を考える. ただし $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の標準内積を表す. このとき以下の問いに答えよ.

(i) V は実線形空間であることを示せ.

(ii) V の基底を求めよ.

(iii) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ は, $\alpha \in \mathbb{R}$ と $\boldsymbol{y} \in V$ により

$$\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{m} + \boldsymbol{y}$$

とただ一通りに表されることを示せ.

(iv) $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して, (iii) で定まる $\boldsymbol{y} \in V$ を $f(\boldsymbol{x})$ と表す. このとき,

$$f : \mathbb{R}^3 \to V$$

は線形写像であることを示せ.

(v) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ について (iii) における $\alpha \in \mathbb{R}$ と $\boldsymbol{y} \in V$ を求めよ.

微分積分

[3] (i) n を自然数とするとき,

$$\frac{1}{n} > \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$$

であることを示せ.

(ii) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散することを示せ.

(iii) 任意の $s > 1$ に対して, 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は収束することを示せ.

(iv) 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+n^2} - n - \frac{a}{n} \right)$$

が収束するように実数 a を定めよ.

[4] (i) 閉区間 $[a,b]$ で定義された関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\ldots}$ が，$[a,b]$ の各点で $f(x)$ に収束することの定義を，ε-N 論法を用いて述べよ．

(ii) 閉区間 $[a,b]$ で定義された関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\ldots}$ が，$[a,b]$ で $f(x)$ に一様収束することの定義を述べよ．

以下では，自然数 n に対し，閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 $g_n(x)$ を次で定義する:

$$g_n(x) = \begin{cases} nx & \left(0 \le x \le \dfrac{1}{n}\right) \\ 2-nx & \left(\dfrac{1}{n} \le x \le \dfrac{2}{n}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{2}{n} \le x \le 1\right) \end{cases}$$

(iii) $y = g_n(x)$ $(0 \le x \le 1)$ のグラフを描け．

(iv) 任意の $x \in [0,1]$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ であることを，ε-N 論法を用いて証明せよ．

(v) 上で定義された関数列 $\{g_n(x)\}_{n=1,2,\ldots}$ は区間 $[0,1]$ で一様収束しないことを証明せよ．

専門科目

[5] p を素数とし, C を位数 p の巡回群とする. 直積群 $G = C \times C$ の部分群で単位群でも G 自身でもないもの全体からなる集合を X とする.

$$X = \{H \mid H \text{ は単位群でも } G \text{ 自身でもない } G \text{ の部分群}\}.$$

このとき次の問いに答えよ.

(i) H を単位群でも G 自身でもない G の部分群とするとき, H の位数を求めよ.

(ii) $H_1, H_2 \in X$ に対し, $H_1 \neq H_2$ ならば $H_1 \cap H_2$ は単位群であることを示せ.

(iii) $G = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n$ $(H_1, \ldots, H_n \in X)$ ならば $n \geq p+1$ であることを示せ.

(iv) X は $p+1$ 個の部分群からなり, それらを $H_1, \ldots, H_{p+1}$ とすると,

$$G = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_{p+1}$$

であることを示せ.

[6] 体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ とその元 $\alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ について次の問いに答えよ. ただし, $\mathbb{Q}$ は有理数体を表す.

(i) 拡大次数 $[K : \mathbb{Q}]$ を求めよ. また, K の $\mathbb{Q}$ 上の基底を一組求めよ. 答えだけでなく, その理由も述べること.

(ii) $\mathbb{Q}(\alpha) = K$ であることを示せ.

(iii) α と $\mathbb{Q}$ 上共役である複素数をすべて求めよ.

(iv) (iii) で求めた α と $\mathbb{Q}$ 上共役である複素数のうち α 以外のものを一つ選び, それを β とする. さらに, $L = K(\beta)$ とおく. このとき, L の部分体をすべて求めよ.

[7] (i) (X, d_X) と (Y, d_Y) を距離空間とする（ただし d_X と d_Y はそれぞれの空間の距離を表す）. このとき X から Y への写像 f が $x_0 \in X$ で連続であることの定義を述べよ.

(ii) n を自然数とする. n 次元実ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の元 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ のノルムを

$$||z|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i^2}$$

と定め, $\mathbb{R}^n$ の 2 点 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ と $y = (y_1, \cdots, y_n)$ の距離を

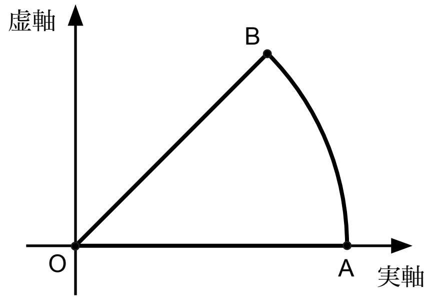
$$d(x, y) = ||x - y||$$

と定義する. このとき $\mathbb{R}^n$ 上の関数

$$f(x) = \begin{cases} ||x||^{-1} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は 0 でない $x \in \mathbb{R}^n$ で連続であることを示せ. さらに f は $0 \in \mathbb{R}^n$ において連続であるか否かを理由も述べて答えよ.

[8] R を正の実数とする．複素平面上で $0,\ R,\ \dfrac{(1+i)R}{\sqrt{2}}$ に対応する点を，それぞれ O, A, B として，線分 OA, 原点を中心とする円弧 AB，線分 BO をこの順につないでできる閉曲線を C_R とする (下図)．また，C_R の向きを反時計回りと定める．



このとき，以下の問いに答えよ．

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ であることを示せ．

(ii) 複素線積分 $\displaystyle\int_{C_R} e^{iz^2}dz$ の値を求めよ．

(iii) (i), (ii) の結果を利用して $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin\left(x^2\right)dx$ の値を求めよ．

[9] 実数 a について 3 次元ユークリッド空間の部分集合

$$Z_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+az^2=1\}$$

を考える．このとき以下の問いに答えよ．

(i) Z_a が閉集合となることを示せ．

(ii) Z_a が有界となるような a の範囲を求めよ．またその理由も述べること．

(iii) Z_a 上の点 (x_0,y_0,z_0) における接平面の方程式を求めよ．