2020年2月24日 実施

2020年度 (春季)
理学研究科博士課程 前期課程 数学専攻 入学試験問題
(数 学)

[注意] * 合図があるまでこのページをめくらないこと.

- 配られたすべての解答用紙に受験番号を記入せよ.
- 線形代数の問題 ([1], [2]) から 1 題, 微分積分の問題 ([3], [4]) から 1 題, 専門科目の問題 ([5]~[9]) の中から 1 題の, 計 3 題を選んで解答せよ.
- 解答はすべて解答用紙に記入し, 問題ごとに解答用紙 1 枚を使用せよ.
- 解答用紙が 3 枚配られていることを確認せよ. そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ.
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ.

線形代数

[1] a を実数とし，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする．実ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^4$ の間の線形写像 T を

$$T : V \longrightarrow W, \quad T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

と定める．このとき次の問いに答えよ．

(i) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を求めよ．

(ii) $\mathrm{Ker}\, T = \{\boldsymbol{0}\}$ であるための a の条件を求めよ．

(iii) T が単射であるとき，次のベクトルは $\mathrm{Im}\, T$ の基底であることを示せ．

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(iv) T が単射であるとき，$S \circ T = \mathrm{id}_V$ を満たす線形写像 $S : \mathrm{Im}\, T \longrightarrow V$ が存在する．ただし id_V は V から V への恒等写像を表す．(iii) の $\mathrm{Im}\, T$ の基底と V の標準基底

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

に関する S の表現行列を求めよ．

[2] $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ を複素係数 n 次正方行列の全体の集合とする．また，$A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ は $A^2 = A$ を満たすものとし，$r = \mathrm{rank}(A)$ とおく．

(i) A の固有値は 0 と 1 のみであることを示せ．

(ii) A の固有値 0 の固有空間を V_0，固有値 1 の固有空間を V_1 とおく．V_0 の次元 $\dim_{\mathbb{C}} V_0$，および V_1 の次元 $\dim_{\mathbb{C}} V_1$ をそれぞれ求めよ．

(iii) A は対角化可能であることを示せ．

(iv) $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ を行列の和とスカラー倍によって $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす．線形写像 $\Phi_A : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ を

$$\Phi_A(X) = AXA \quad (X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}))$$

によって定める．線形写像としての Φ_A の rank を n と r を用いて表せ．

微分積分

[3] 実数 p は $p>2$ を満たすとする．実数 x を変数とするべき級数 $f(x)$ を

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^p}$$

と定義する．

(i) $f(x)$ の収束半径 R を求めよ．

(ii) $f(-1)$ は収束することを示せ．

(iii) $f(1)$ は絶対収束することを示せ．

(iv) $\dfrac{f(1)}{f(-1)}$ を求めよ．

[4] 極方程式

$$r=1-\cos\theta \quad (0\leq\theta\leq 2\pi)$$

で定義される $\mathbb{R}^2$ 内の曲線 C を考える．

(i) C の概形を描け．

(ii) C の長さを求めよ．

(iii) 非負整数 n に対し，

$$I_n=\int_0^{2\pi}\cos^n\theta d\theta$$

とおく．漸化式

$$I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

が成り立つことを示せ．

(iv) C で囲まれる領域を D とするとき，積分

$$\iint_D x^2dxdy$$

の値を求めよ．

[5] (i) 群 G に対して，次の条件は同値であることを示せ．

(a) G はアーベル群である．

(b) 写像 $x \longmapsto x^{-1}$ $(x \in G)$ は G から G への群の準同型写像である．

$\mathrm{Aut}(G)$ を G の自己同型写像全体の集合とするとき，$\mathrm{Aut}(G)$ は写像の合成に関して群をなす．このとき次の問いに答えよ．

(ii) $g \in G$ に対して，写像 $i_g : G \longrightarrow G$ を

$$x \longmapsto gxg^{-1} \quad (x \in G)$$

と定める．$i_g \in \mathrm{Aut}(G)$ を示せ．

(iii) 写像 $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$ を

$$g \longmapsto i_g \quad (g \in G)$$

と定める．φ は群の準同型写像であることを示せ．

(iv) φ の核を求めよ．また，φ の像が単位群であるための必要十分条件を求めよ．

(v) 位数が 3 以上の群 G に対し，$\mathrm{Aut}(G)$ は自明な群でない，すなわち G は恒等写像以外の自己同型写像を持つことを示せ．

[6] $\mathbb{Q}$ を有理数体とし，1 の原始 n 乗根 $\zeta_n = \exp\left(\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{n}\right)$ とする．ただし，n は 2 以上の正の整数とする．また $K_n = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(i) $[K_5 : \mathbb{Q}]$，および $[K_{20} : \mathbb{Q}]$ を求めよ．

(ii) ガロア群 $\mathrm{Gal}(K_5/\mathbb{Q})$，および $\mathrm{Gal}(K_{20}/\mathbb{Q})$ を決定せよ．

(iii) $K_{20}/\mathbb{Q}$ の中間体で，非自明なものの個数を拡大次数ごとに求めよ．

(iv) K_5 に含まれる 2 次体は $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ のみであることを示せ．

(v) K_{20} に含まれる 2 次体を全て求めよ．

[7] 次の問いに答えよ．

(i) X を集合とする．写像 $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ が X 上の距離関数であることの定義を正確に述べよ．

(ii) $X = \mathbb{R}^2$ とする．写像 $d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$d_1\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, \qquad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

で定める．(i) で述べた定義に基づき，d_1 が $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数であることを示せ．

(iii) $\delta > 0$ を正の実数，$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ とするとき，集合

$$R_\delta\big((x, y)\big) = \big\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, d_1\big((u, v), (x, y)\big) = |u - x| + |v - y| < \delta\big\}$$

を座標平面上に図示せよ．

(iv) $\mathrm{id} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を恒等写像とする．このとき id は距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_1)$ から距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_2)$ への連続写像であることを示せ．ただし，d_2 は $\mathbb{R}^2$ 上のユークリッド距離とする．

[8] 2 変数関数 $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ を

$$x(u, v) = (3 + \cos u)\cos v, \quad y(u, v) = (3 + \cos u)\sin v, \quad z(u, v) = \sin u$$

とし，$\mathbb{R}^3$ 内の曲面 S を以下で定める．

$$S = \big\{\, \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, (u, v) \in D \big\}.$$

ただし，$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq 2\pi\}$．このとき次の問いに答えよ．

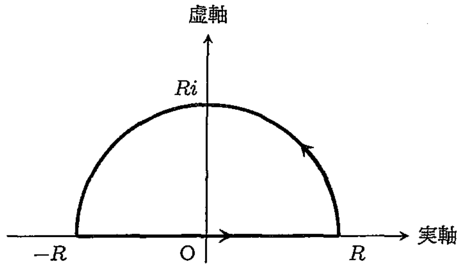
(i) S の第 1 基本量を求めよ．

(ii) S の表面積を求めよ．

(iii) S のガウス曲率を求めよ．

(iv) S の主曲率を求めよ．

[9] λ を正の実数，R を $R > 1$ を満たす正の実数とする．また i を虚数単位とする．複素平面上において，実軸上の区間 $[-R, R]$ と半円 Re^{it} $(0 \leq t \leq \pi)$ をつないでできる閉曲線を C_R とする．C_R には，実軸上を $-R$ から R へ向かう向きを定めておく．



複素関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

によって定める．このとき次の問いに答えよ．

(i) 複素線積分 $\displaystyle\int_{C_R} f(z)e^{i\lambda z}\,dz$ の値を求めよ．

(ii) $\displaystyle\max_{0\leq t\leq\pi} |f(Re^{it})| \leq \frac{R}{R^2-1}$ であることを示せ．

(iii) 不等式 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-\lambda R\sin t}\,dt \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-2\lambda Rt/\pi}\,dt$ を示せ．

(iv) (i), (ii), (iii) の結果を利用して，広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(\lambda x)}{x^2+1}\,dx$ を求めよ．