2020 年 9 月 12 日 実施

2021 年度 (夏季)

理学研究科博士課程 前期課程 数学専攻 入学試験問題

(数 学)

[注意] * 試験時間終了後，指示に従って速やかに答案を提出すること．

- すべての解答用紙の左上に受験番号を記入し，右上には全体の通し番号と解答用紙の総枚数を記入せよ．**氏名は記入しないこと．**
- **線形代数の問題 ([1], [2]) から 1 題，微分積分の問題 ([3], [4]) から 1 題，専門科目の問題 ([5]∼[9]) の中から 1 題の，計 3 題を選んで解答せよ．**
- 解答はすべて解答用紙に記入し，問題 1 題につき解答用紙 4 枚まで使用出来る．
- 質問がある場合は，挙手して監督者に知らせること．監督者が挙手を確認したら，メールで指示を送る．
- 途中でトイレに行く場合や気分が悪くなった場合は，挙手して監督者に知らせること．監督者が挙手を確認したら，メールで指示を送る．

線形代数

[1] 行列

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ -5 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ.

(i) A の固有値をすべて求めよ.

(ii) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．また，そのとき，$P^{-1}AP$ を求めよ.

(iii) A の固有値 λ の固有空間を $V(\lambda)$ と表す．$AB = BA$ を満たす実 3 次正方行列 B が存在するとき，$\boldsymbol{v} \in V(\lambda)$ ならば $B\boldsymbol{v} \in V(\lambda)$ であることを示せ.

(iv) $A = B^2$ を満たす実 3 次正方行列 B が存在するとき，ある正則行列 P について，$P^{-1}AP$ が対角行列であるならば，$P^{-1}BP$ も対角行列であることを示せ.

(v) $A = B^2$ となる実 3 次正方行列 B をすべて求めよ.

[2] 3 次元実ベクトル空間 V の基底を $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ とする．また，a を正の実数とし，V 上の線形写像 $f : V \longrightarrow V$ を

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= a\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + a\boldsymbol{e}_3 \\ f(\boldsymbol{e}_2) &= a\boldsymbol{e}_1 + a\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ f(\boldsymbol{e}_3) &= \boldsymbol{e}_1 + a\boldsymbol{e}_2 + a\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

により定める．このとき，以下の問いに答えよ.

(i) V の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ.

(ii) 線形写像 $g : V \longrightarrow V$ について，g が全射であることと，g が単射であることは同値な条件であることを証明せよ.

(iii) f が全射になるような a の条件を求めよ．また，そのとき，V の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ に関する f の逆写像 f^{-1} の表現行列を求めよ.

(iv) f が全射でないとき，f の像 $\mathrm{Im}\, f$ と核 $\mathrm{Ker}\, f$ をそれぞれ求めよ.

微分積分

[3] 実数列 $\{a_n\}$ は実数 α に収束し，また，任意の n に対して $b_n > 0$ となる数列 $\{b_n\}$ について $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ であるとする．以下の問いに答えよ．

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ および $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ の定義をそれぞれ述べよ．

(ii) (i) で述べた定義にもとづいて，任意の自然数 N について

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=N+1}^{n} b_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k} = 1$$

であることを証明せよ．

(iii) (i) で述べた定義にもとづいて，任意の自然数 N について

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N} b_k a_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k} = 0$$

であることを証明せよ．

(iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k a_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k}$ を求めよ．

(v) (iv) の結果を用いて，任意の実数 θ について

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\theta}{k}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} = \theta$$

であることを証明せよ．

[4] $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 $S : 2z = x^2 + y^2$ と平面 $H : x + z = 4$ について，以下の問いに答えよ．

(i) S と H の交線を C とする．C を xy-平面へ正射影して出来る曲線 C' を求めよ．

(ii) S と H で囲まれた部分の体積 V を求めよ．

(iii) C の点のうち，z 座標が最小となる点の z 座標 を a する．a の値を求めよ．

(iv) a を (iii) で求めた値とする．S のうち，平面 $z = a$ より下側にある部分の面積 A を求めよ．

専門科目

[5] 群 G における部分群 H の指数 $[G:H]=n$ は有限であるとする．また，G における H の左剰余類の集合を $G/H=\{a_iH \mid a_i \in G,\ i=1,\dots,n\}$ とする．次の問いに答えよ．

(i) G の元 g に対して, 写像 $\varphi_g:\{1,\dots,n\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}$ の対応規則を $(ga_i)H=a_jH$ ならば $\varphi_g(i)=j$ と定める．φ_g は n 次対称群 S_n の元であることを示せ．

(ii) $\rho: G \longrightarrow S_n,\ \rho(g)=\varphi_g$ は群の準同型写像であることを示せ．

(iii) 群 G, G' について，準同型写像 $\phi: G \to G'$ の核 $\ker \phi$ は G の正規部分群であることを示せ．

(iv) G の正規部分群 N であって，$[G:N]<\infty$ かつ $N \subseteq H$ を満たすものが存在することを示せ．

[6] $\mathbb{F}_3$ を位数 3 の体とし，$L=\mathbb{F}_3(t)$ を $\mathbb{F}_3$ 上の有理関数体とする．以下の問いに答えよ．ただし，次の定理は証明なしで利用しても良い:

「体 K の有理関数環 $K(t)$ において，定数でない任意の多項式 $f(t) \in K[t]$ に対して $[K(t):K(f(t))]=\deg f(t)$ が成り立つ.」

(i) $a \in \mathbb{F}_3^\times, b \in \mathbb{F}_3$ に対して,

$$\varphi_{a,b}: L \longrightarrow L,\quad \frac{f(t)}{g(t)} \longmapsto \frac{f(at+b)}{g(at+b)}$$

は L の自己同型写像を引き起こすことを示せ.

(ii) 集合

$$G=\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{F}_3^\times, b \in \mathbb{F}_3 \right\}$$

は行列の積に関して一般線型群 $GL_2(\mathbb{F}_3)$ の部分群であることを示せ.

(iii) $\Psi: G \longrightarrow \mathrm{Aut}(L),\quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \varphi_{a,b}$ は群の単射準同型写像であることを示せ.

(iv) 固定体 $K=L^G$ を決定し，L/K がガロア拡大であるかどうか，理由を付して答えよ.

(v) G の部分群 H と対応する中間体 L^H をすべて求めよ.

[7] 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ を距離 $d(z,w)=|z-w|\ (z,w \in \mathbb{C})$ から誘導される位相により位相空間とみなす．このとき，以下の問いに答えよ.

(i) 集合 X とその部分集合族 $\mathcal{O}$ の組 $(X,\mathcal{O})$ が位相空間であることの定義を述べよ.

(ii) 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ 上の複素数値関数 $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ が連続であることの定義を述べよ.

(iii) 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ がコンパクトであることの定義を述べよ.

(iv) コンパクトな位相空間 $(X,\mathcal{O})$ 上の連続な複素数値関数 $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ について，$f(X)$ は $\mathbb{C}$ の有界な部分集合であること示せ.

[8] $1 < R$ とする．複素平面上の路 C_1, C_2, C_3 を次のように定める．

C_1	：	実軸上を $z_1 = 0$ から $z_2 = R$ まで向かう路
C_2	：	原点を中心とする半径 R の円上を反時計回りに，$z_2 = R$ から $z_3 = Ri$ まで向かう路
C_3	：	虚軸上を $z_3 = Ri$ から $z_1 = 0$ まで向かう路

この 3 つの路を C_1, C_2, C_3 の順に結んでできる反時計回りの閉じた路を C とする．
また，$J = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,dx$, $f(z) = \dfrac{z}{z^4+1}$ とする．

(i) C の内部にある $f(z)$ の極をすべて挙げよ．また，それらの点における $f(z)$ の留数を求めよ．

(ii) $I_1 = \displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz$, $I_3 = \displaystyle\int_{C_3} f(z)\,dz$ とするとき，I_3 を I_1 を用いて表せ．

(iii) $I_2 = \displaystyle\int_{C_2} f(z)\,dz$ とするとき，$\displaystyle\lim_{R\to\infty} I_2 = 0$ であることを示せ．

(iv) J の値を求めよ．

[9] $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $U = (-\infty, \infty) \times (0, 2\pi)$ に対して，2 つの曲面 S_1, S_2 を次のように定める．

$$S_1 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (t,\theta) \longmapsto \boldsymbol{x}(t,\theta) = (\cosh t\cos\theta, \cosh t\sin\theta, t)$$
$$S_2 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u,\varphi) \longmapsto \boldsymbol{y}(u,\varphi) = (u\cos\varphi, u\sin\varphi, \varphi)$$

以下の問いに答えよ．

(i) S_i $(i = 1, 2)$ の第 1 基本形式を $\mathrm{I}(S_i)$ と表す．$\mathrm{I}(S_1) = E_1dt^2 + 2F_1dtd\theta + G_1d\theta^2$, $\mathrm{I}(S_2) = E_2du^2 + 2F_2dud\varphi + G_2d\varphi^2$ をそれぞれ求めよ．

(ii) 全単射な C^2 級写像 $F : U \longrightarrow U$, $(t,\theta) \longmapsto (u,\varphi)$ であって，$\mathrm{I}(S_2 \circ F) = \mathrm{I}(S_1)$ を満たすものが存在することを証明せよ．

(iii) S_i $(i = 1, 2)$ の第 2 基本形式を $\mathrm{II}(S_i)$ と表す．$\mathrm{II}(S_1) = L_1dt^2 + 2M_1dtd\theta + N_1d\theta^2$, $\mathrm{II}(S_2) = L_2du^2 + 2M_2dud\varphi + N_2d\varphi^2$ をそれぞれ求めよ．

(iv) S_i $(i = 1, 2)$ のガウス曲率を $K(S_i)$ と表す．$K(S_1), K(S_2)$ をそれぞれ求めよ．

(v) 全単射な C^2 級写像 $F : U \longrightarrow U$, $(t,\theta) \longmapsto (u,\varphi)$ であって，$\mathrm{I}(S_2 \circ F) = \mathrm{I}(S_1)$ および $K(S_2 \circ F) = K(S_1)$ を満たすものが存在するかどうか，理由を付して答えよ．