2021 年 7 月 18 日 実施

2022 年度 （夏季）

立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程数学専攻入学試験問題

(数 学)

〔注意〕＊合図があるまでこのページをめくらないこと.

1. 解答用紙が 3 枚配られていることを確認せよ. そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ.
2. 配られたすべての解答用紙に受験番号を記入せよ.
3. 解答はすべて解答用紙に記入し, 問題ごとに解答用紙 1 枚を使用せよ.
4. **線形代数の問題 ([1], [2]) から 1 題, 微分積分の問題 ([3], [4]) から 1 題, 専門科目の問題 ([5]∼[9]) から 1 題の, 計 3 題を選んで解答せよ.**
5. 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ.

線形代数

[**1**] $a \geq 0$ に対し, 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

で定める.

(i) A の固有多項式を求めよ.

(ii) A が相異なる 3 つの固有値を持つような a の条件を求めよ. また, そのとき, A のすべての固有値とそれぞれの固有値の固有空間を求めよ.

(iii) a を (ii) で求めた条件を満たさない値とする. このとき, A が対角化可能でないならばその理由を述べ, また対角化可能ならば対角行列 $P^{-1}AP$ と正則行列 P を求めよ.

[**2**] x を変数とする 2 次以下の実数係数多項式のなす実線形空間を V とする. $f(x) \in V$ に対し, x の多項式

$$\int_1^{x+1} f(y)dy$$

を x で割った商を $h_f(x)$ と定める. このとき, 実数 s に対し V から V への写像 T_s を $T_s(f)(x) = h_f(x) + sf(x)$ と定める.

(i) T_s は線形写像であることを示せ.

(ii) V の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T_s の表現行列を求めよ.

(iii) $\mathrm{Ker}\, T_s$ を求めよ.

(iv) $s = 1$ のとき, $T_s(f)(x) = 1 + x + x^2$ となる $f(x)$ をすべて求めよ.

微分積分

[3] s を実数とし, 関数 $f_s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を以下のように定義する.

$$f_s(x) = \begin{cases} e^{-x^s} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0). \end{cases}$$

(i) $f_s(x)$ が $\mathbb{R}$ 上連続となるような s の値の範囲を求めよ.

(ii) 関数列 $\{f_{-n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_{-n}(x)$ を求めよ.

(iii) (ii) の収束は一様収束かどうか理由も付して答えよ.

[4] (i) a を正の実数とするとき, 定積分の値

$$\int_0^a t^2 e^{-t} dt$$

を a を用いて表せ.

(ii) a を正の実数とする.

$$D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq a,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

とおくとき, 二重積分の値

$$J_a = \iint_{D_a} x^3 y e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

を a を用いて表せ.

(iii) (ii) で求めた J_a に対して, 極限

$$\lim_{a\to\infty} J_a$$

を求めよ.

専門科目

[5] G_1, G_2 を群とし, e_1, e_2 をそれぞれの単位元とする. また, $G = G_1 \times G_2$ を G_1, G_2 の直積群とし, G の単位元を $e = (e_1, e_2)$ と表す. さらに, $i = 1, 2$ に対して,

$$p_i : G \longrightarrow G_i, \quad (x_1, x_2) \longmapsto x_i$$

を G_i への射影とする.

(i) p_1, p_2 は準同型写像であることを示せ.

(ii) H_1, H_2 をそれぞれ G_1, G_2 の部分群, $f : H_1 \longrightarrow H_2$ を準同型写像とするとき,

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in H_1\}$$

は G の部分群であることを示せ.

(iii) G の部分群 H に対して, q_1 を p_1 の H への制限とする. このとき, q_1 が単射である条件を $\mathrm{Ker}(p_1)$ を用いて表せ.

(iv) G の部分群 H に対して, (iii) で定義した q_1 が単射であるとする. このとき, $H_1 = p_1(H)$, $H_2 = p_2(H)$ とおくと, ある準同型写像 $f : H_1 \longrightarrow H_2$ が存在して, $H = \Gamma_f$ となることを示せ. ただし, Γ_f は (ii) で定義した群である.

[6] p を素数とし, $\alpha = \sqrt{p + \sqrt{p}}$ とおく. $\mathbb{Q}$ を有理数体とし, $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ とおく.

(i) 平方数でない互いに素な任意の自然数 m, n に対して, $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ であることを示せ. ただし, 平方数でない任意の自然数 N に対して, $\sqrt{N}$ は無理数であることを証明無しに用いてよい.

(ii) 拡大次数 $[K : \mathbb{Q}]$ を求めよ. また, α の $\mathbb{Q}$ 上の共役元をすべて求めよ.

(iii) $p - 1$ が平方数ならば K は $\mathbb{Q}$ 上のガロア拡大であることを示せ.

(iv) L を K の $\mathbb{Q}$ 上のガロア閉包とするとき, $\sqrt{p-1} \in L$ であることを示せ.

(v) K が $\mathbb{Q}$ 上のガロア拡大ならば $p - 1$ は平方数であることを示せ.

[7] a を実数とし,

$$Z_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = a\}$$

を 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の部分位相空間とする.

(i) Z_{-1} 上の関数 $f : Z_{-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y, z) = |z|$$

と定義する. このとき f の最小値を求めよ.

(ii) Z_{-1} は連結な空間かどうか理由を付して答えよ.

(iii) Z_0 は連結な空間かどうか理由を付して答えよ.

[8] 複素関数 $f(z)$ を

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{(1+z^2)(4+z^2)}$$

とおく．実数 R は $R>2$ を満たすとする．複素平面上の 2 点 $z=-R$, $z=R$ を結ぶ線分を L とし, 半円 $\{z\in\mathbb{C}\mid z=Re^{i\theta}, 0\leq\theta\leq\pi\}$ を C_R とする．また L と C_R を合わせて反時計回りに一周する閉曲線を C とする．

(i) $f(z)$ の極をすべて求めよ．また, それぞれの極における留数を求めよ．

(ii) 複素線積分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$ の値を求めよ．

(iii) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz=0$ を示せ．

(iv) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)(4+x^2)}dx$ の値を求めよ．

[9] u を実数とし,

$$\gamma(u)=(\cos u,\sin u,0),\quad \xi(u)=(-\sin u,\cos u,1)$$

とおく．このとき曲面 S のパラメータ表示 (媒介変数表示) を

$$p:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3,\quad (u,v)\longmapsto p(u,v)=\gamma(u)+v\xi(u)$$

で与える．

(i) 曲面 S の第一基本量 E, F, G を求めよ．

(ii) $(x,y,z)=p(u,v)$ とするとき, 曲面 S を表す x,y,z に関する方程式を求めよ．

(iii) $\mathbb{R}^3$ の部分集合 D を

$$D=p(\mathbb{R}^2)\cap\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,-\sqrt{\frac{1}{2}}\leq z\leq\sqrt{\frac{1}{2}}\right\}$$

と定める．このとき D の曲面積を求めよ．

(iv) 曲面 S は無限個の直線を含むことを示せ．