2022 年 7 月 17 日 実施

2023 年度 (夏季)
理学研究科博士課程 前期課程 数学専攻 入学試験問題
(数 学)

[注意] * 合図があるまでこのページをめくらないこと.

- 解答用紙が 3 枚配られていることを確認せよ. そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ.
- 配られたすべての解答用紙の左上に受験番号を記入せよ.
- **線形代数の問題 ([1], [2]) から 1 題, 微分積分の問題 ([3], [4]) から 1 題, 専門科目の問題 ([5]~[9]) の中から 1 題の, 計 3 題を選んで解答せよ.**
- 解答はすべて解答用紙に記入し, 問題ごとに解答用紙 1 枚を使用せよ.
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ.

線形代数

[1] 写像 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a-2c \\ b+c \\ c \end{pmatrix}$$

で定義する．また, 写像 $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ -c \end{pmatrix}$$

で定義する．

(i) f および g は線形写像であることを示せ.

(ii) f および g の, $\mathbb{R}^3$ の標準基底

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

に関する表現行列をそれぞれ A および B とする．A と B を求めよ.

(iii) n を正の整数とするとき, A^n を求めよ.

(iv) $C = AB$ とするとき，行列 C の固有値と，それに属する固有空間の基底を一組求めよ．また, C が対角化できるかを判定し，その理由を述べよ．対角化できる場合, $D = P^{-1}CP$ が対角行列となるような正方行列 P および対角行列 D を求めよ.

(v) m を正の整数とするとき, (iv) の C に対して C^m を求めよ.

[2] n, k を自然数として，$\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{C}^n$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ とする.

(i) $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_k$ が $\mathbb{C}$ 上一次独立 (線形独立) であることの定義を記せ.

(ii) $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_k$ が $\mathbb{C}$ 上生成する $\mathbb{C}^n$ の部分空間 $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \rangle$ の定義を記せ.

(iii) 次の命題の正否を調べ，正しいならば証明し，誤りであれば反例をあげよ.

(a) $n \geq 2$, $k \geq 3$ を固定する．$1 \leq i < j \leq k$ を満たす任意の自然数の組 i, j に対して $\boldsymbol{u}_i$ と $\boldsymbol{u}_j$ が $\mathbb{C}$ 上一次独立ならば，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_k$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立である.

(b) $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_{k-1}$ が $\mathbb{C}$ 上一次独立で, $\boldsymbol{u}_k \notin \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{k-1} \rangle$ ならば $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_k$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立である.

(c) $\boldsymbol{v}_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} \boldsymbol{u}_j$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ とする．$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_k$ が $\mathbb{C}$ 上一次独立ならば, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_k$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立である.

微分積分

[3] 広義積分 $S = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)dx$ について，次の問いに答えよ．

(i) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+0} \sqrt{x}\log(\sin x)$ を求めよ．

(ii) 広義積分 S は収束することを示せ．

(iii) 2 つの広義積分 $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(\cos x)dx$ と $J = \displaystyle\int_0^{\pi} \log(\sin x)dx$ をそれぞれ S を用いて表せ．

(iv) $S + I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(\sin x \cos x)dx = \int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$ が成り立つことを利用して，S の値を求めよ．

(v) S の値を利用して，広義積分 $T = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x\cos x}{\sin x}dx$ の値を求めよ．

[4] $x \neq 0$ に対して，$f(x) = e^{-1/x^2}$ とする．

(i) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 \log|x|$ の値を求めよ．

(ii) n を自然数とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n}$ の値を求めよ．

(iii) n を自然数とする．$x \neq 0$ に対して，

$$g_n(x) = e^{1/x^2} f^{(n)}(x)$$

とおく．ただし $f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 階導関数である．$g_{n+1}(x)$ を $g_n(x)$, $g_n'(x)$ を用いて表せ．

(iv) (iii) の $g_n(x)$ に対して $h_n(x) = x^{3n}g_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とおく．$h_{n+1}(x)$ を $h_n(x)$, $h_n'(x)$ を用いて表せ．

(v) 任意の自然数 n に対して，(iv) の $h_n(x)$ は $2(n-1)$ 次多項式であることを証明せよ．

(vi) $f(x)$ の定義域を拡張した関数 $F(x)$ を次で定める：

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

$x = 0$ において，$F(x)$ は何回でも微分可能であることを証明せよ．また，$F^{(n)}(0)$ の値を求めよ．ただし $F^{(n)}(x)$ は $F(x)$ の n 階導関数である．

専門科目

[5] 整数環 $\mathbb{Z}$ 上の多項式環 $\mathbb{Z}[X]$ のイデアルについて，次の問いに答えよ．

(i) (X) は素イデアルであることを示せ．

(ii) $(X, 2)$ は単項イデアルでないことを示せ．

(iii) (ii) の $(X, 2)$ は極大イデアルであることを示せ．

(iv) $(X^2 + 1, 2)$ は素イデアルかどうか判定せよ．

[6] 有理数体 $\mathbb{Q}$ に $\alpha = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$ を添加した拡大体を $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(i) $\dfrac{\alpha^2 - 54}{12} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6}$ を満たす 3 つの整数 a, b, c を求めよ．

(ii) $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ はともに K に含まれることを示せ．

(iii) K は $\mathbb{Q}$ のガロア拡大であることを示し，α の $\mathbb{Q}$ 上の共役元をすべて求めよ．

(iv) K と $\mathbb{Q}$ の中間体をすべて求めよ．

[7] 区間 $I = [0, 1]$ 上の連続関数全体の集合を $C(I)$ と表す．関数 $d\colon C(I) \times C(I) \to \mathbb{R}$ を，$f, g \in C(I)$ に対して，

$$d(f, g) = \max_{x \in I} |f(x) - g(x)|$$

で定義する．

(i) $(C(I), d)$ は距離空間であることを示せ．

(ii) $C(I)$ の点列 $\{f_n\}_{n=1,2,3,\ldots}$ がコーシー列であるとする．この時, 任意の $x \in I$ に対して $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ が存在することを示せ．

(iii) $(C(I), d)$ は距離空間として完備であることを示せ．

[8] $\mathbb{R}^3$ の曲面 S を，

$$S(u, v) = (uv, u + 2v, u - v)$$

で定義する．ただし, u, v は実数全体を動くとする．

(i) S は正則曲面であることを示せ．

(ii) S の第一基本量を求めよ．

(iii) S の第二基本量を求めよ．

(iv) S のガウス曲率を求めよ．

[9] i を虚数単位，a を正の実数として，$f(z) = \dfrac{z^2 e^{iaz}}{1+z^4}$ と定める．

(i) $f(z)$ の極をすべて求めよ．また，それぞれの極の位数を求めよ．

(ii) (i) で求めた極のうち，虚部が正であるものすべてについて，留数を求めよ．

(iii) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(ax)}{1+x^4} dx$ が収束することを示し，その値を求めよ．