2023年2月20日 実施

# 2023年度　(春季)

# 立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程数学専攻入学試験問題

# ( 数 学 )

〔注意〕＊合図があるまでこのページをめくらないこと.

1. 解答用紙が3枚配られていることを確認せよ. そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ.

2. 配られたすべての解答用紙の左上に受験番号を記入せよ.

3. 解答はすべて解答用紙に記入し, 問題ごとに解答用紙1枚を使用せよ.

4. **線形代数の問題 ([1], [2]) から1題, 微分積分の問題 ([3], [4]) から1題, 専門科目の問題 ([5]∼[9]) から1題の, 計3題を選んで解答せよ.**

5. 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ.

## 線形代数

**[1]** 実数 $t$ に対して次の行列を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & t+2 & t-8 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

(i) $A$ の行列式と $A$ の階数を求めよ.

(ii) $A$ の全ての固有値を決定せよ.

(iii) $A$ が対角化可能となる $t$ の値を全て求めよ.

(iv) $A$ が対角化可能となる $t$ に対し, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 $P$ と, そのときの $P^{-1}AP$ を求めよ.

**[2]** $m, n$ を非負の整数とする. 線形写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ と $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の合成写像 $g \circ f$ が

$$g \circ f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

を満たすとする. また $p = f \circ g$ とおき, 線型写像 $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $q(y) = y - p(y)$ で定義する. このとき以下の問に答えよ.

(i) $m \leq n$ であることを示せ. また $m = n$ のときは $f$ は線形同型写像となることを示せ.

(ii) $p \circ p = p$ が成り立つことを示せ.

(iii) 任意の $y \in \mathbb{R}^n$ は

$$y = z + w, \qquad z \in \mathrm{Im}\ p, \quad w \in \mathrm{Im}\ q$$

とただ一通りに表されることを示せ.

## 微分積分

**[3]** $\{a_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ を正の実数列とする.

(i) $x > 0$ ならば $\log(1+x) < x$ であることを示せ.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$ は収束することを示せ.

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$ を求めよ.

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$ が収束するならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束することを示せ.

(v) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cosh 1 \cdot \cosh \frac{1}{2} \cdots \cosh \frac{1}{n}$ は収束することを示せ. ただし $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ である.
(ヒント : (ii) を利用するとよい.)

**[4]** $\{a_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ を正の実数列とし, ある $0 < \delta < 1$ に対し, すべての $n$ について $a_n \leq \delta$ が成り立つとする. $[0,1]$ 上の関数列 $A_n$ と $B_n$ を

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 1 + a_1 x, \quad B_0 = 1, \quad B_1 = 1$$

$$\begin{cases} A_n = A_{n-1} + a_n x A_{n-2} \\ B_n = B_{n-1} + a_n x B_{n-2} \end{cases}, \quad n \geq 2$$

と定め,

$$f_n(x) = \frac{A_n}{B_n}.$$

とする. $n = 1, 2, 3, \dots$ について, 以下の問に答えよ.

(i) $A_n$ と $B_n$ はすべての係数が正となる $x$ の実数係数の多項式となり

$$A_n(0) = B_n(0) = 1, \quad A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1} = (-1)^{n-1} a_1 \cdots a_n x^n$$

が成り立つことを示せ.

(ii) $f_n$ は $[0,1]$ における連続関数で

$$f_n(0) = 1, \quad f_n(x) > 0, \quad x \in [0,1]$$

となることを示せ.

(iii)

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{(-1)^n a_1 \cdots a_{n+1} x^{n+1}}{B_n B_{n+1}}.$$

が成り立つことを示せ.

(iv) すべての $x \in [0,1]$ について

$$B_n(x) \geq 1.$$

が成り立つことを示せ.

(v) 関数列 $\{f_n\}_n$ は $[0,1]$ 上定義された, ある連続関数 $f$ に一様収束することを示し, 右極限

$$\lim_{x \to +0} f(x)$$

を求めよ.

## 専門科目

**[5]** $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ を 1 の原始 $n$ 乗根とし, $\zeta = \zeta_{24}$ とする.

(i) 拡大次数 $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$ を決定せよ.

(ii) $\zeta^6, \zeta^3, \zeta^2, \zeta^2 + \zeta^{-2}$ と $\zeta^3 + \zeta^{-3}$ を整数および整数の平方根の加減剰余だけで表せ.

(iii) $\zeta$ を $\zeta_3$ と $\zeta_8$ で表せ. また, ある整数 $a, b, c$ により $\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$ と書けることを示せ.

(iv) 群の同型写像

$$f : (\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}), \qquad r \mapsto (\zeta \mapsto \zeta^r)$$

により $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$ と $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ を同一視する. この同一視のもとで $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ の位数 4 の部分群を全て求めよ.

(v) (iv) の部分群に対応する 2 次拡大 $M/\mathbb{Q}$ を求めよ.

**[6]** (i) 環 $R \neq \{0\}$ に対して次を示せ:

任意の $x \in R$ に対して $x^2 = x$ が成り立つとき, $R$ の標数は 2 であり, $R$ は可換環である.

(ii) $p$ を素数とする.

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ pb & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

は行列の和と積について環となる. このとき, $R$ と $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$ は環として同型であることを示せ.

(iii) 多項式 $f_n(x) = x^3 + nx + 2 \in \mathbb{Z}[x]$ が既約となるような $n$ を求めよ. また既約でない場合の $n$ について $f_n(x)$ を既約因子に分解せよ.

**[7]** $0 < \varepsilon < 1$, $R > 1$ とし,

$$C_1 = \{x \mid \varepsilon \le x \le R\}, \quad C_2 = \{Re^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}\},$$
$$C_3 = \{te^{i\frac{\pi}{3}} \mid \varepsilon \le t \le R\}, \quad C_4 = \{\varepsilon e^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}\}.$$

とおく. 各 $C_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ の向きは下の図の矢印の方向とし, $C_1, C_2, C_3, C_4$ からなる複素平面上の閉曲線を $C_{R,\varepsilon}$ とする. また

$$f(z) = \frac{\mathrm{Log}\, z}{1 + z^6}$$

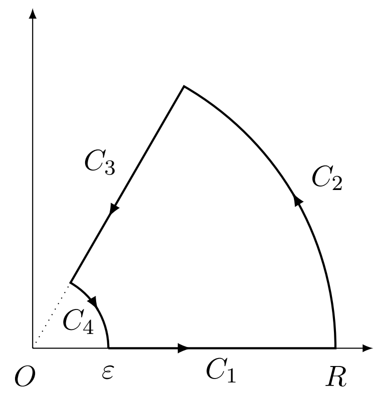
とおく. ただし $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ $(r > 0,\ -\pi < \theta < \pi)$ に対して $\mathrm{Log}\, z = \log r + i\theta$ とする.

(i) $C_{R,\varepsilon}$ の内部における $f(z)$ の全ての極と, その点での留数を求めよ.

(ii) $\displaystyle\int_{C_{R,\varepsilon}} f(z)dz$ を求めよ.

(iii) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_2} f(z)dz$, および $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_4} f(z)dz$ を求めよ.

(iv) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^6}dx$ を求めよ. (ヒント: $\displaystyle e^{-\pi i/3}\int_{C_{R,\varepsilon}} f(z)dz$ を利用するとよい.)




**[8]** $X$ を距離空間とし, $d_X$ をその距離関数とする. 写像 $f : Y \to X$ が与えられているとき, $Y \times Y$ 上の関数 $d_Y$ を

$$d_Y(y_1, y_2) = d_X(f(y_1), f(y_2)), \quad (y_1, y_2) \in Y \times Y$$

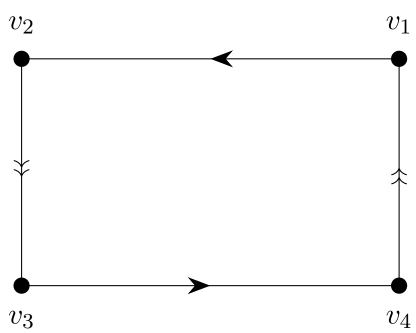
と定める. このとき以下の問に答えよ.

(i) $f$ が単射であるとき, $d_Y$ は $Y$ 上の距離関数となることを示せ.

(ii) (i) のとき, $f$ は距離 $d_Y$ と $d_X$ により連続写像となることを示せ.

(iii) $f$ が単射であることを仮定しないとき, $d_Y$ は $Y$ 上の距離関数となるか. $d_Y$ が $Y$ 上の距離関数となるときはその理由を述べよ. そうでないときは $d_Y$ が距離関数とならない $f$ の例を挙げよ.

**[9]** 以下の図で同じ種類の矢印どうしが重なるように長方形の辺を貼り合わせて作られる図形を $P$ とする（$P$ は実射影平面とよばれる）.



このとき以下の問いに答えよ.

(i) 頂点 $v_1, v_2, v_3, v_4$ のうち, 貼り合わせたときに重なる頂点を決定せよ.

(ii) $P$ のオイラー数 $\chi(P)$ を求めよ.

(iii) $P$ の実数係数のホモロジー群 $H_i(P, \mathbb{R})$ $(i = 0, 1, 2)$ の次元を求めよ.

(iv) $P$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数のホモロジー群 $H_i(P, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ $(i = 0, 1, 2)$ の次元を求めよ.