2023 年 7 月 16 日 実施

2024 年度 （夏季）

立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程数学専攻入学試験問題

（ 数 学 ）

〔注意〕＊合図があるまでこのページをめくらないこと.

1. 解答用紙が 3 枚, 計算用紙が 3 枚配られていることを確認せよ. そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ.
2. 配られたすべての解答用紙の左上に受験番号を記入せよ.
3. 解答はすべて解答用紙に記入し, 問題ごとに解答用紙 1 枚を使用せよ.
4. **線形代数の問題 ([1], [2]) から 1 題, 微分積分の問題 ([3], [4]) から 1 題, 専門科目の問題 ([5]∼[9]) から 1 題の, 計 3 題を選んで解答せよ.**
5. 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ.

線形代数

[1] $a > 0$ に対し, 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ -a & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ を考える.

(i) A の固有多項式と固有値を求めよ.

(ii) A の各固有空間について, その基底を一組与えよ.

(iii) A が対角化可能となる a を求めよ. また, その a について $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P と, そのときの $P^{-1}AP$ を求めよ.

(iv) A が対角化可能でない a の場合, A のジョルダン標準形を決定せよ.

[2] I を 3 次単位行列とし, O を 3 次零行列とする. 3 次正方行列 A が, 互いに異なる実数 α, β, γ について

$$(A - \alpha I)(A - \beta I)(A - \gamma I) = O$$

を満たし, さらに $(A - \alpha I)(A - \beta I)$, $(A - \beta I)(A - \gamma I)$, $(A - \gamma I)(A - \alpha I)$ のいずれも O でないとする. このとき以下の問に答えよ.

(i) $(A - \alpha I)(A - \beta I) = (A - \beta I)(A - \alpha I)$ を示せ.

(ii) $(A - \alpha I)(A - \beta I)x \neq 0$ となる任意の $x \in \mathbb{R}^3$ について, $(A - \alpha I)(A - \beta I)x$ は A の固有ベクトルとなることを示せ. またそのときの固有値を求めよ.

(iii) α, β, γ はいずれも A の固有値となることを示せ.

(iv) $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$ をそれぞれ固有値 α, β, γ を持つ A の固有ベクトルとする. このとき $\{v_\alpha, v_\beta, v_\gamma\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底となることを示せ.

(v) 行列 $(A - \alpha I)(A - \beta I)$, $(A - \beta I)(A - \gamma I)$, $(A - \gamma I)(A - \alpha I)$ の階数を求めよ.

微分積分

[3] (i) 区間 I 上定義された関数 f が一様連続であることの定義を述べよ.

(ii) $I = [0, \infty]$ 上の関数 $y = x^2$ は I 上一様連続ではないことを示せ.

(iii) $I = [1, \infty]$ 上の関数 $y = \sqrt{x}$ は I 上一様連続であることを示せ.

(iv) 区間 I 上の関数 f が, ある正の実数 M に対して,

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \quad (\forall x, y \in I)$$

を満たしているとするなら, f は I 上一様連続であることを示せ.

(v) f が $\mathbb{R}$ 上 C^1 級であるならば有界閉区間 I 上一様連続であることを, (iv) を用いて証明せよ.

[4] s を実数とする. $\mathbb{R}$ 上の関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} |x|^s \sin \dfrac{1}{x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

と定義する.

(i) $x \neq 0$ における $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(ii) $x = 0$ において $f(x)$ は微分可能であるような s の値の範囲を求めよ. また微分可能である場合, $f'(0)$ の値を求めよ.

(iii) (ii) で微分可能である場合, 導関数 $f'(x)$ が $x = 0$ で連続となるような s の値の範囲を求めよ.

専門科目

[5] 実数係数線型空間 S, T, U とそれらの間の準同型

$$S \xrightarrow{F} T \xrightarrow{G} U$$

の列が**完全列**であるとは, $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Ker}(G)$ であるときにいう.

以下では, L, M, N を実数係数線型空間とし, $O = \{0\}$ とおく. $O \xrightarrow{i} L$ を包含写像, $N \xrightarrow{\pi} O$ を, 全ての元を 0 に送る写像とする. このとき準同型としての列

$$O \xrightarrow{i} L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{\pi} O$$

について, 以下の問いに答えよ.

(i) f が単射であるための必要十分条件は,

$$O \xrightarrow{i} L \xrightarrow{f} M$$

が完全列であることを示せ.

(ii) g が全射であるための必要十分条件は,

$$M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{\pi} O$$

が完全列であることを示せ.

(iii) f が単射かつ g が全射であり,

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

が完全列であるとする. このとき L と N が有限次元線型空間であれば, M も有限次元線型空間であることを示せ.

[6] $\zeta_5 = \exp\left(\dfrac{2\pi i}{5}\right) \in \mathbb{C}$ とし, 複素数体 $\mathbb{C}$ に含まれる円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ を考える. このとき以下の問に答えよ.

(i) ガロア群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q})$ を求めよ.

(ii) $F = \mathbb{Q}(\zeta_5) \cap \mathbb{R}$ とするとき, 拡大次数 $[F : \mathbb{Q}]$ を求めよ. ただし $\mathbb{R}$ は実数体を表す.

(iii) $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ であることを示せ.

(iv) $\sqrt{5}$ を ζ_5 を用いて表せ.

[7] 上半平面 H を

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > 0 \right\}$$

と定義し，H 上の第 1 基本形式 I_H を

$$I_H = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

と定める．また y 軸上の点 P と Q を $P = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$ と $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく．さらに, 第 1 基本形式 I_H による微分可能な曲線 γ の長さを $L(\gamma)$ とする．このとき以下の問に答えよ.

(i) $p > 1$ とし, P と Q を結ぶ線分を γ_0 とする．このとき $L(\gamma_0)$ を求めよ.

(ii) P と Q を結ぶ任意の微分可能な曲線 γ について

$$L(\gamma) \geq L(\gamma_0)$$

となることを示せ.

(iii) $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$ に対して H 内の領域 $\triangle_H(0, \alpha, \beta)$ を

$$\triangle_H(0, \alpha, \beta) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H \;\middle|\; -\cos\alpha \leq x \leq \cos\beta, \quad x^2 + y^2 \geq 1 \right\}.$$

と定める．このとき第 1 基本形式 I_H についての $\triangle_H(0, \alpha, \beta)$ の面積を求めよ.

[8] 閉区間 $[-1, 1]$ 上定義された連続関数全体の集合を $\mathcal{C}$ とし, $f, g \in \mathcal{C}$ に対し

$$d(f, g) = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx$$

とおく．このとき, 以下の問に答えよ.

(i) d は集合 $\mathcal{C}$ 上の距離関数となることを示せ.

(ii) 正の整数 n に対して $f_n \in \mathcal{C}$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} nx + 1 & -\dfrac{1}{n} \leq x \leq 0 \\ -nx + 1 & 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

と定める．このとき $d(\mathbf{0}, f_n)$ を求めよ．ただし $\mathbf{0}$ はすべての $x \in [-1, 1]$ で値 0 をとる連続関数を表す.

(iii) $\{f_n\}_n$ は距離空間 $(\mathcal{C}, d)$ のコーシー列となることを示せ.

(iv) 関数列 $\{f_n\}_n$ は距離空間 $(\mathcal{C}, d)$ において収束するか, 理由を述べて判定せよ.

[9] (i) 複素関数

$$f(z) = \frac{z^{-2}}{e^z + 1}$$

の極をすべて求めよ.

(ii) (i) の関数 $f(z)$ の各極における位数と留数を求めよ.

(iii) N を自然数とし, 複素平面上の 4 点 $\pm 2N\pi \pm 2N\pi i$ を頂点とする正方形を反時計まわりに一周する閉路を C_N とする. このとき以下の積分値を求めよ.

$$\int_{C_N} \frac{z^{-2}}{e^z + 1} dz$$

(iv) (iii) を利用して以下の級数の値を求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$