2024 年 2 月 19 日 実施

2024 年度 （春季）

立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程数学専攻入学試験問題

(数 学)

〔注意〕＊合図があるまでこのページをめくらないこと.

1. 解答用紙が 3 枚, 計算用紙が 3 枚配られていることを確認せよ. そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ.
2. 配られたすべての解答用紙の左上に受験番号を記入せよ.
3. 解答はすべて解答用紙に記入し, 問題ごとに解答用紙 1 枚を使用せよ.
4. **線形代数の問題 ([1], [2]) から 1 題, 微分積分の問題 ([3], [4]) から 1 題, 専門科目の問題 ([5]～[9]) から 1 題の, 計 3 題を選んで解答せよ.**
5. 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ.

線形代数

[1] $M_2(\mathbb{R})$ は実数を成分とする 2 次正方行列全体の集合を表すとする．$A, B \in M_2(\mathbb{R})$ について，次の写像を定義する:

$$f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), \qquad X \mapsto AX - XB.$$

また, 任意の行列 Z について, Z^T は Z の転置行列を表す．このとき以下の問に答えよ.

(i) f は線型写像であることを示せ.

(ii) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ は固有値 λ に属する A の固有ベクトル，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ は固有値 μ に属する B^T の固有ベクトルのとき,

$$X = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 \\ x_2y_1 & x_2y_2 \end{pmatrix}$$

は固有値 $\lambda - \mu$ に属する f の固有ベクトルであることを示せ.

(iii) A と B が共に固有値 ν を持つとき, 零行列でない $C \in M_2(\mathbb{R})$ が存在し，$AC = CB$ が成り立つことを示せ.

(iv) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -24 & 2 \end{pmatrix}$ のとき, $AD = DB$ となる零行列でない $D \in M_2(\mathbb{R})$ を一つ求めよ.

[2] 3 行 4 列行列 A とその転置行列 A^T および実数 a, b が次の等式を満たしているとする:

$$(*) \quad A^TA = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (**) \quad AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

このとき以下の問に答えよ.

(i) AA^T の固有値を全て求め, 各固有値について, 固有空間の基底を求めよ.

(ii) A の階数を求めよ.

(iii) A の第 i 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ とする．すなわち, $A = (\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\boldsymbol{a}_3\,\boldsymbol{a}_4)$ である．このとき, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は AA^T の固有ベクトルであることを示せ．また, $\boldsymbol{a}_4$ は 0 ベクトルであることを示せ.

(iv) a と b の値を求めよ.

(v) 等式 $(*)$ と $(**)$ をともに満たすような A を一つ求めよ.

微分積分

[3] 領域 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2>0,\ x>0\}$ 上の関数 $f(x,y)$ と, $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $D_n,\ E_n$ $(n=1,2,\ldots)$ を次で定める.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}, \\ D_n &= \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{n}\le x\le 1,\ 0\le y\le x-\frac{1}{n} \right\}, \\ E_n &= \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{n}\le x\le 1,\ 0\le y\le \left(1-\frac{1}{n}\right)x \right\}. \end{aligned}$$

このとき以下の問に答えよ.

(i) 極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しないことを示せ.

(ii) a を正の実数, t を $\left(-\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{a}\right)$ 上を動く変数とするとき, $\dfrac{d}{dt}\arcsin(at)$ を計算せよ. ただし, $\arcsin$ は $\sin$ の逆関数を表し, $-\dfrac{\pi}{2}<\arcsin(at)<\dfrac{\pi}{2}$ とする.

(iii) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ であることを示せ.

(iv) $\displaystyle I_n = \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy$ とする. 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ が存在するか判定し, 存在するならばその値を求めよ.

[4] 実数 $m\in\mathbb{R}$ に対して, 次の関数を定義する:

$$f_m:\ (-\infty,2\pi)\to\mathbb{R},\quad f_m(x)=\begin{cases} mx & (x\le 0), \\ \dfrac{x-\sin x}{1-\cos x} & (x>0). \end{cases}$$

このとき以下の問に答えよ.

(i) 任意の $m\in\mathbb{R}$ に対して, f_m は $x=0$ で連続であることを示せ.

(ii) 任意の $m\le 0$ に対して, $f_m((-\infty,2\pi))=[0,\infty)$ であることを示せ.

(iii) f_m が $x=0$ で微分可能であるような m を決定せよ.

専門科目

[5] $\mathbb{Z}$ 上の多項式 $f(x)$ を, $f(x) = x^3 - 12x - 34$ で定義するとき, 以下の問に答えよ.

(i) $f(x)$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上既約であることを示せ.

(ii) $f(x)$ はちょうど一つの実数根を持つことを示せ. 以下, この根を α とする.

(iii) $\alpha = 2^{5/3} + 2^{1/3}$ を示せ.

(iv) $f(x)$ の相異なる根を α, β, γ とする. ただし, α は (ii) で定めたものである. このとき, $f(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上の分解体 $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$ について, $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を決定せよ.

[6] 体 F において, 次のように二項演算 $\circ$ を定義する:

$$a \circ b = a + b - ab, \qquad a, b \in F.$$

このとき以下の問に答えよ.

(i) $a, b \in F \setminus \{1\}$ のとき, $a \circ b \neq 1$ であることを示せ.

(ii) $a, b \in F \setminus \{1\}$ のとき, $a \circ b = b \circ a$ であることを示せ.

(iii) $(F \setminus \{1\}, \circ)$ がアーベル群をなすことを示せ. この群を F° と表す.

(iv) F の乗法群を $F^\times = (F \setminus \{0\}, \times)$ とすると, F° と $F^\times$ が同型であることを示せ.

[7] I を閉区間 $[0,1]$ とする. $\mathbb{R}$ の標準的な距離を制限することで I を距離空間とみなし, $\mathbb{R}$ および I に, 距離から定まる位相を入れる. $f\colon I \to I$ を写像とするとき, $f(x) = x$ を満たす $x \in I$ を, f の不動点という. また, $e\colon I \to I$ を恒等写像とする. すなわち, 任意の $x \in I$ について, $e(x) = x$ である. このとき以下の問に答えよ.

(i) 連続とは限らない写像 $g\colon I \to I$ で, 不動点を持たないものの例を与えよ.

(ii) $h\colon I \to \mathbb{R}$ を連続写像とする. このとき, 写像 $h - e\colon I \to \mathbb{R}$ が $(h-e)(x) = h(x) - x$ によって定まるが, $h - e$ が連続であることを ε-δ 論法により示せ.

(iii) $k\colon I \to I$ を連続写像とするとき, k は不動点を持つことを示せ.

(iv) 連続写像 $\ell\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で, 不動点を持たないものの例を与えよ.

[8] $\mathbb{R}^3$ の部分集合 X を,

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

で定義する．写像 $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を,

$$\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u) \in \mathbb{R}^3$$

で定義する．また, $\mathbb{R}^3$ の単位球面 S^2 を

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

とする．このとき以下の問に答えよ.

(i) F の像は X に含まれることを示せ.

(ii) F は X への全射であることを示せ.

(iii) F は X に正則曲面の構造を与えることを示せ.

(iv) X 上の点 $F(u, 0)$ における単位法線ベクトルを求めよ.

(v) X 上の点 p に対して, p における単位法線ベクトルを $\nu(p)$ とする．p に対して, $\nu(p)$ を位置ベクトルとする点を対応させる写像 $\nu\colon X \to S^2$ を, X のガウス写像という．X のガウス写像による像 $\nu(X)$ を求めよ.

[9] 複素関数 $f(z), g(z), h(z)$ が以下を満たしている.

- $g(z)$ は整関数である．すなわち, $g(z)$ は複素数平面全体で正則である.
- $g(z) = z(z - \pi i)^2 f(z) = zh(z)$.
- $h'(z) = \dfrac{z-1}{z}\, h(z), \quad h(\pi i) = \dfrac{i}{\pi}$.

ただし, i は虚数単位とする．このとき以下の問に答えよ.

(i) $g'(z)$ を $g(z)$ を用いて表せ.

(ii) $g(z)$ の $z = \pi i$ でのテイラー展開を求めよ.

(iii) $f(z)$ のすべての極とその位数を求め, それぞれにおける留数を求めよ.

(iv) 円周 $|z - \pi i| = \dfrac{\pi}{2}$ に反時計回りに向きを定めた閉曲線を C とする．複素線積分 $\displaystyle\int_C \frac{zf(z)}{(z - \pi i)^3} dz$ の値を求めよ.