2024 年 7 月 14 日 実施

2025 年度 （夏季）

立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程数学専攻入学試験問題

（ 数 学 ）

〔注意〕＊合図があるまでこのページをめくらないこと.

1. 解答用紙が 3 枚, 計算用紙が 3 枚配られていることを確認せよ. そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ.
2. 配られたすべての解答用紙の左上に受験番号を記入せよ.
3. 解答はすべて解答用紙に記入し, 問題ごとに解答用紙 1 枚を使用せよ.
4. **線形代数の問題 ([1], [2]) から 1 題, 微分積分の問題 ([3], [4]) から 1 題, 専門科目の問題 ([5]∼[9]) から 1 題の, 計 3 題を選んで解答せよ.**
5. 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ.

線形代数

[1] 実数係数の 2 次以下の多項式全体のなす $\mathbb{R}$ 上の ベクトル空間を

$$V = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

とする．$t \in \mathbb{R}$ に対して, V 上の写像 T_t を,

$$T_t : V \longrightarrow V, \quad f(x) \mapsto x^2 f''(x) + f(x+t)$$

と定める．ただし, $f''(x)$ は $f(x)$ の第 2 次導関数とする．以下の問に答えよ.

(i) T_t は V 上の線形写像であることを示せ.

(ii) V の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T_t の表現行列 A を求めよ.

(iii) A の固有値をすべて求めよ.

(iv) A が対角化可能となる t の条件を求めよ.

[2] A を, 複素数を成分に持ち, $A^4 = E_4$ をみたす 4 次正方行列とする．ただし E_4 は 4 次の単位行列とする．以下の問に答えよ.

(i) A は正則行列であることを示せ.

(ii) A の固有値を α とすると $\alpha \in \{\pm 1, \pm i\}$ であることを示せ.

(iii) A が対角化可能であることを示せ.

(iv) A のトレースの絶対値は 4 以下であることを示せ.

微分積分

[3] $\mathbb{R}$ の部分集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-1,0) \cup (0,+\infty)\}$ で定義された関数

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$$

および

$$g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(i) f は開区間 $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$ 上で定義された連続関数に拡張できることを示し, その時の $x=0$ での値を求めよ．

(ii) (i) で拡張した f のマクローリン展開を求めよ．ただし, (i) で拡張した f は何回でも微分可能であることは用いて良い．

(iii) g は開区間 $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$ 上で定義された連続関数に拡張できることを示し, その時の $x=0$ での値を求めよ．

(iv) (iii) で拡張した g のマクローリン展開を 2 次まで求めよ．ただし, (iii) で拡張した g は何回でも微分できることは用いて良い．

[4] 区間 $I=[0,2]$ 上の関数

$$f_n(x) = \frac{(n+2)x + 2n^2x^3}{1+n^2x^2} \quad (n = 1,2,3,\ldots)$$

について, 以下の問に答えよ．

(i) 関数列 $\{f_n(x)\}$ が区間 I で各点収束することで得られる極限関数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(ii) 区間 I 上で関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に一様収束するか判定せよ．

(iii) 区間 $J=[1,2]$ 上で関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に一様収束するか判定せよ．

(iv) 極限 $\lim_{n\to\infty} \int_1^2 f_n(x)dx$ の値を求めよ．

専門科目

[5] R を 1 を持つ可換環とする．以下の問に答えよ．

(i) イデアル $I \subset R$ が極大イデアルであるための必要十分条件は R/I が体であることである．これを示せ．

(ii) R のイデアル I に対して

$$\sqrt{I} := \{a \in R \mid \text{ある自然数 } n \text{ が存在して } a^n \in I\}$$

と定義する．このとき $\sqrt{I}$ は R のイデアルとなることを示せ．

(iii) R のイデアル I が「$ab \in I$ を満たしているならば $a \in I$ もしくは $b \in \sqrt{I}$」をみたすとき，I を準素イデアルと呼ぶ．準素イデアル I に対して $\sqrt{I}$ は素イデアルとなることを示せ．

(iv) $R = \mathbb{R}[x, y]$ のイデアル $I = (x^2, y)$ は素イデアルではないことを示せ．また $\sqrt{I} = (x, y)$ となることを示せ．

[6] 複素数 ζ を 1 の原始 7 乗根とし，$\eta = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$ とする．また，$L = \mathbb{Q}(\zeta)$，$K = \mathbb{Q}(\eta)$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(i) ζ の $\mathbb{Q}$ 上のモニックな最小多項式 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ を求めよ．また，拡大次数 $[L : \mathbb{Q}]$ を決定せよ．

(ii) η の $\mathbb{Q}$ 上のモニックな最小多項式 $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ を求め，$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ であることを示せ．

(iii) 群の同型写像

$$\varphi : (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times \to \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}), \quad \bar{r} \mapsto (\zeta \mapsto \zeta^r)$$

により，$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$ と $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ を同一視する．この同一視のもとで，$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ の部分群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ に対応する $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$ の部分群の生成元を 1 つ求めよ．

(iv) ζ の K 上のモニックな最小多項式 $h(x) \in K[x]$ を求めよ．

[7] (X, d) を距離空間とする．$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を，$f(0) = 0$ である 2 回微分可能な関数で，全ての実数 x で，$f'(x) > 0$ かつ $f''(x) < 0$ を満たすとする．$X \times X$ 上の実数値関数 D を，

$$D(p, q) = f(d(p, q))$$

で定義する．また，$X \times X$ 上の実数値関数 E を，

$$E(p, q) = \frac{d(p, q)}{1 + d(p, q)}$$

で定義する．以下の問に答えよ．

(i) (X, E) は距離空間であることを示せ．

(ii) $D(p,q) \geq 0$ を示せ．また, $D(p,q) = 0 \Longleftrightarrow p = q$ であることを示せ.

(iii) (X, D) は距離空間であることを示せ.

[8] $\mathbb{R}^3$ の直線 l, m を,

$$l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ s \mapsto l(s) = (s, 0, 0),$$

$$m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto m(t) = (0, t, 1)$$

で定義する．l 上の点 p, m 上の点 q に対して, p, q を通る直線を n_{pq} と書く．以下の問に答えよ.

(i) $(1, 2, 3) \in n_{pq}$ であるような p, q を全て求めよ.

(ii) $X = \displaystyle\bigcup_{p \in l, q \in m} n_{pq}$ がどのような集合かを決定せよ.

(iii) $Y = \displaystyle\bigcup_{s \in \mathbb{R}} n_{l(s)m(s)}$ を

$$\{(x, y, z) \mid a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5yz + a_6xz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10} = 0\}$$

と表すとき, 実数 $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ を求めよ.

(iv) (iii) で求めた集合 Y が正則曲面の構造を持つことを示せ.

[9] 複素関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{z^4 + 1}{z^2(2z + 1)(z + 2)}$$

とおく．このとき, 以下の問に答えよ.

(i) $f(z)$ の極をすべて求めよ．また, それぞれの極の位数を求めよ.

(ii) (i) で求めたすべての極について, それぞれ留数を求めよ.

(iii) 原点を中心とした半径 1 の円を反時計周りに一周する閉曲線 C に沿った複素積分

$$I = \int_C f(z)dz$$

の値を求めよ.

(iv) (iii) で求めた I の値を利用して, 実積分

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta$$

の値を求めよ.