2025 年 2 月 19 日 実施

2025 年度 （春季）

立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程数学専攻入学試験問題

（ 数 学 ）

〔注意〕＊合図があるまでこのページをめくらないこと.

1. 解答用紙が 3 枚, 計算用紙が 3 枚配られていることを確認せよ. そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ.
2. 配られたすべての解答用紙の左上に受験番号を記入せよ.
3. 解答はすべて解答用紙に記入し, 問題ごとに解答用紙 1 枚を使用せよ.
4. **線形代数の問題 ([1], [2]) から 1 題, 微分積分の問題 ([3], [4]) から 1 題, 専門科目の問題 ([5]∼[9]) から 1 題の, 計 3 題を選んで解答せよ.**
5. 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ.

線形代数

[1] $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ を次の行列が定める線形写像とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) f の核の基底を一組求めよ.

(ii) A は固有値 1 を持つことを示せ. また, 固有値 1 の固有空間の基底を一組求めよ.

(iii) A が対角化可能であるか否かを判定せよ. その理由も説明すること.

[2] 数ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^3$ の線形変換 $f : V \to V$, $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ が, ベクトル

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

に関して等式

$$f(\boldsymbol{p}_1) = \boldsymbol{p}_1, \quad f(\boldsymbol{p}_2) = a\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2, \quad f(\boldsymbol{p}_3) = -2\boldsymbol{p}_3$$

をみたしている. ただし a は実数とする.

(i) V の基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\}$ に関する f の表現行列 B を求めよ.

(ii) V の標準基底に関する f の表現行列 A を求めよ.

(iii) A の固有値をすべて求めよ.

(iv) A が対角化可能であるような a をすべて求めよ.

微分積分

[3] (i) a を正の実数とし, $f(x)$ を $(0,a]$ で定義された連続関数とする.

$$J_n = \int_{1/n}^{a} |f(x)| dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

で定まる数列 $\{J_n\}_n$ がコーシー列ならば

$$I_n = \int_{1/n}^{a} f(x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

で定まる数列 $\{I_n\}_n$ もコーシー列であることを示せ.

(ii) (i) の $f(x)$ について, 広義積分 $\displaystyle\int_0^a |f(x)| dx$ が存在すれば, 広義積分 $\displaystyle\int_0^a f(x) dx$ も存在することを示せ.

(iii) $0 < x < \pi/4$ において

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < \sin x < x$$

が成り立つことを示せ.

(iv) $\alpha > 0$ とする. このとき積分

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x^\alpha}{\sin x} dx.$$

が存在することを示せ.

[4] $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を次で定める.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x - y$$

(i) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくとき, $f(x,y)$ を r と θ を用いて表せ.

(ii) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ とするとき, 重積分

$$\iint_D f(x,y) dxdy$$

の値を求めよ.

(iii) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x\}$ とするとき, 重積分

$$\iint_E f(x,y) dxdy$$

の値を求めよ.

専門科目

[5] 位数 5 の有限体 $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ 上の 5 次多項式 $f(x) = x^5 - x - 1 \in \mathbb{F}_5[x]$ の根 α について $E = \mathbb{F}_5(\alpha)$ とする.

(i) $\alpha+1, \alpha+2, \alpha+3, \alpha+4$ も $f(x)$ の根であることを示せ. また, $\alpha \notin \mathbb{F}_5$ を示せ.

(ii) E は $f(x)$ の最小分解体であることを示せ. また, $1 < [E : \mathbb{F}_5] \leq 5$ であることを示せ.

(iii) 任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{F}_5)$ に対して $\sigma(\alpha) \in \{\alpha, \alpha+1, \alpha+2, \alpha+3, \alpha+4\}$ であることを示せ. また, $\sigma \neq id$ であるとき, σ の位数を求めよ.

(iv) $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{F}_5)$ は位数 5 の巡回群であることを示せ.

[6] 体 K に対して, $R(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in K \right\}$ とする.

(i) $R(K)$ は行列の加法と乗法に関して可換環であることを示せ.

(ii) K が実数体 $\mathbb{R}$ であるとき, $R(K)$ は体であることを示せ.

(iii) K が複素数体 $\mathbb{C}$ であるとき, $R(K)$ は体でないことを示せ.

[7] 体 K 上の n 次元数ベクトル空間を

$$K^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in K\}$$

とし, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in K^n$ の異なる成分の個数

$$\#\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \,|\, x_i \neq y_i\}$$

を $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ で表す.

(i) $d : K^n \times K^n \to \mathbb{R}$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は距離の公理をみたすことを示せ.

(ii) 距離空間 (K^n, d) の任意の 1 点部分集合 $\{\boldsymbol{x}\}$ は開集合であることを示せ.

(iii) 距離空間 (K^n, d) の任意の部分集合 A は開集合であることを示せ.

[**8**] $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ とする.

$$f : D \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (a(x,y), b(x,y))$$

を C^1 級写像とし,

$$f_x = \left(\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x}\right), \quad f_y = \left(\frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial b}{\partial y}\right)$$

とする. f が条件

$$||f_x|| = ||f_y||, \quad \langle f_x, f_y \rangle = 0$$

を満たすとき, f を等角写像とよぶ. ただし, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ はベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の標準内積を表し, $||\mathbf{a}|| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$ とする. また, 複素数 $z = x+iy$ に対して

$$F(z) = a(x,y) + ib(x,y)$$

とおく.

(i) 複素関数 F が変数 z について微分可能であるとき, 等式

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y}, \quad \frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{\partial b}{\partial x}$$

が成り立つことを示せ.

(ii) F が変数 z について微分可能であれば, f は等角写像になることを示せ.

(iii) f が等角写像であるとき, F は z について微分可能であるか. この命題が正しければその証明を, 誤りであれば反例を挙げて解答せよ.

[**9**] n は正の整数とする. 複素関数

$$f_n(z) = \frac{((n-1)!)^2}{(z^2+1)^n}$$

について以下の問に答えよ.

(i) $f_n(z)$ の極のうち虚部が正であるものすべてについて, その極と位数を求め, それぞれにおける留数を求めよ.

(ii) $r > 1$ とする. 複素平面において, 実軸上の $-r$ から r までを結ぶ線分を I_r とし, 0 を中心とする半径 r の上半円を J_r とする. I_r と J_r を合わせて得られる閉曲線を $C_r = I_r \cup J_r$ とし, 反時計回りに向きを定める. このとき, 複素線積分 $\displaystyle\int_{C_r} f_n(z)dz$ の値を求めよ.

(iii) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n}dx$ の値を求めよ.