

2027 年度 (夏季)
立教大学大学院 理学研究科 博士課程前期課程
数学専攻 入学試験問題
(数 学)

[注意] ＊合図があるまでこのページをめくらないこと.

1. 解答用紙が 3 枚, 計算用紙が 3 枚配られていることを確認せよ. そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ.
2. 配られたすべての解答用紙に受験番号を記入せよ.
3. 解答はすべて解答用紙に記入し, 問題ごとに解答用紙 1 枚を使用せよ.
4. 線形代数の問題 ([1], [2]) から 1 題, 微分積分の問題 ([3], [4]) から 1 題, 専門科目の問題 ([5]~[9]) から 1 題の, 計 3 題を選んで解答せよ.
5. 解答用紙の左上に, 選択した問題の番号を記入すること. たとえば [1] を選択した場合には, 「1」ではなく「[1]」と記入すること. 解答用紙の裏面を使用してもよいが, その場合には表面の所定の欄に○印を記入すること.
6. 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ.

線形代数

[1] a, b は正の実数, c を実数とし, 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

を考える. また V を実係数 3 次正方行列全体のなす 9 次元実ベクトル空間とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (i) A の固有値を求めよ.
- (ii) A が対角化可能であることを示せ.
- (iii) $W = \{X \in V \mid XA = AX\}$ とする. W は V の部分空間であることを示せ.
- (iv) W の次元を求めよ.

[2] N を 2 以上の自然数として, N 次実対称行列全体からなる実ベクトル空間を $\text{Sym}(N, \mathbb{R})$ とする.

- (i) $N = 2$ の場合に, $X, Y \in \text{Sym}(2, \mathbb{R})$, $XY \notin \text{Sym}(2, \mathbb{R})$ となる例を挙げよ.
- (ii) 任意の $X, Y \in \text{Sym}(N, \mathbb{R})$ に対して, $XY + YX \in \text{Sym}(N, \mathbb{R})$ であることを証明せよ.

以下では, $\text{Sym}(N, \mathbb{R})$ の部分空間 V_N が次の条件を満たすとする:

$$X, Y \in V_N \Rightarrow XY + YX \in V_N.$$

- (iii) $X \in V_N$ とする. 任意の自然数 k に対して, $X^k \in V_N$ であることを証明せよ.
- (iv) $X \in V_N$ に対する固有多項式 $\phi_X(\lambda)$ の定義を記せ. また, O_N を N 行 N 列の零行列として, $\phi_X(O_N)$ を求めよ. ただし, λ の m 次多項式

$$f(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m,$$

および N 次正方行列 A , N 次単位行列 I_N に対して

$$f(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + \cdots + a_{m-1}A + a_mI_N$$

とする.

- (v) ある $X \in V_N$ に対して $\det X \neq 0$ ならば, $I_N \in V_N$ であることを証明せよ. ただし I_N は N 次単位行列である.
- (vi) ある $X \in V_N$ に対して $\det X \neq 0$ ならば, $X^{-1} \in V_N$ であることを証明せよ.

微分積分

[3] 区間 $J = [a, b]$ 上の関数列 $\{F_n(x)\}$ について,

任意の正の数 ε に対して, $x \in J$ に無関係な正の整数 N が存在して, 自然数 m, n が $m > n > N$ を満たすならば, 任意の $x \in J$ に対して $\left| \sum_{k=n+1}^m F_k(x) \right| < \varepsilon$ である

という条件が成り立つとき, 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ は J 上一様収束する. このことを用いて, 以下の問に答えよ.

(i) 区間 J 上の関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ に対して, 次の条件を満たす実数列 $\{M_n\}$ が存在するものとする:

[条件] 任意の正の整数 n , 任意の $x \in J$ に対して $|F_n(x)| \leq M_n$ が成り立ち, 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束する.

このとき $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ は J 上一様収束することを示せ.

(ii) 区間 $I = [0, 1]$ 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ を $f_n(x) = \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$ ($n = 1, 2, \dots$) と定める. このとき, 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I 上一様収束することを示せ.

(iii) $F_n(x)$ を, 区間 $J = [a, b]$ で定義された連続微分可能な関数とする. $F_n(x)$ の導関数 $F'_n(x)$ を項とする関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} F'_n(x)$ は, J 上一様収束するとする. さらに, J のある点 c において関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ は収束するとする. このとき, $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ は J 上一様収束することを示せ.

(iv) $I = [0, 1]$ 上で定義された関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \log(1+n^2x^2)$ は I 上一様収束するかどうか, 理由も付して答えよ.

[4] a を正の定数とする. 座標空間において, 領域 D を次で定める:

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, (x^2 + y^2 + z^2)^3 \leq 2a^3 xy \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

領域 D を 3 次元極座標

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi)$$

で記述することを考える.

(i) (x, y, z) が原点以外の D の点であるとき, ϕ の取り得る値の最大値, 最小値を求めよ.

(ii) D の体積 V を r, θ, ϕ についての定積分として表せ.

(iii) D の体積 V の値を求めよ.

専門科目

[5] 2以上の自然数 n に対して $V = \mathbb{R}^n$ とおき, V のゼロベクトルを $\mathbf{0}$ とする. V 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \text{ただし } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in V$$

で定める. さらに, $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し, 写像 $F_{\mathbf{a}} : V \rightarrow V$ を次で定める.

$$F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2 \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n).$$

また, V から V への線形写像であって全単射であるもの全体の集合が, 写像の合成に関してなす群を $\text{GL}(V)$ で表す. このとき, 次の問いに答えよ.

- (i) $F_{\mathbf{a}}^2(\mathbf{x}) = F_{\mathbf{a}}(F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}))$ を求めよ.
- (ii) $F_{\mathbf{a}} \in \text{GL}(V)$ を示せ.
- (iii) $F_{\mathbf{a}}$ の固有値とその重複度を求めよ.
- (iv) $\mathbf{0}$ でない2つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ は $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ を満たすとする. $F_{\mathbf{a}}$ と $F_{\mathbf{b}}$ が生成する $\text{GL}(V)$ の部分群を G とするとき, G は可解群であることを示せ. ただし G が可解群であるとは, G の部分群の列

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_m = \{1\}$$

が存在して, 各 k に対して G_{k+1} は G_k の正規部分群であり, かつ G_k/G_{k+1} がアーベル群であることである.

[6] $\mathbb{Q}$ を有理数体, $\mathbb{C}$ を複素数体とし, $\mathbb{Q}$ に $\alpha = \sqrt[3]{3} + \sqrt{-2} \in \mathbb{C}$ を添加した体を $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

- (i) $\sqrt{-2} \in K$ を示せ.
- (ii) 拡大次数 $[K : \mathbb{Q}]$ を求めよ.
- (iii) ω を1の原始3乗根とすると, $\omega \notin K$ を示せ.
- (iv) K は $\mathbb{Q}$ のガロア拡大であるか, 理由を述べて答えよ. また K が $\mathbb{Q}$ のガロア拡大で無い場合は $K/\mathbb{Q}$ のガロア閉包 L を求めよ.

[7] $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 標準内積を $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$, 外積を $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ で表す. 弧長でパラメータづけられた空間曲線 $\mathbf{c}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ ($\in \mathbb{R}^3$) の曲率, 捩率がそれぞれ

$$\kappa(s) = \frac{1}{5(1+s^2)}, \quad \tau(s) = \frac{2}{5(1+s^2)}$$

で与えられているとする. また, $\mathbf{c}(s)$ のフルネ標構 (フレネ標構, Frenet frame) を $\{\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s)\}$ とする. すなわち,

$$\mathbf{e}_1(s) = \frac{d\mathbf{c}(s)}{ds}, \quad \mathbf{e}_2(s) = \frac{1}{\left\| \frac{d^2\mathbf{c}(s)}{ds^2} \right\|} \frac{d^2\mathbf{c}(s)}{ds^2}, \quad \mathbf{e}_3(s) = \mathbf{e}_1(s) \times \mathbf{e}_2(s)$$

である. ただし $\|\mathbf{p}\| = \sqrt{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle}$ ($\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$) である.

- (i) $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1(s) + \mathbf{e}_3(s)$ とすると, $\mathbf{a}$ は s によらず一定であることを示せ.
- (ii) (i) の $\mathbf{a}$ に対して, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{e}_1(s)$ の成す角を $\alpha(s)$ とする. このとき $\cos \alpha(s)$ は s によらず一定であることを示せ.
- (iii) (i) の $\mathbf{a}$ に対して,

$$\mathbf{c}_1(s) = \mathbf{c}(s) - \frac{\langle \mathbf{c}(s), \mathbf{a} \rangle}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$$

とする. $\mathbf{c}_1(s)$ は, ある平面上の曲線であることを示せ.

- (iv) λ を正の定数とする. (iii) の曲線 $\mathbf{c}_1(s)$ に対して

$$\tilde{\mathbf{c}}_1(s) = \mathbf{c}_1(\lambda s)$$

とするとき, s が $\tilde{\mathbf{c}}_1(s)$ の弧長パラメータであるように正定数 λ を定めよ.

- (v) (iv) のパラメータ表示 $\tilde{\mathbf{c}}_1(s)$ において, λ は (iv) で求めた値とする. このとき空間曲線 $\tilde{\mathbf{c}}_1(s)$ の曲率 $\tilde{\kappa}(s)$ を求めよ.

[8] X を空でない集合とし, X 上に 2 つの距離関数 d_1, d_2 が定義されているとする. d_1, d_2 の定める X の開集合が一致するとき, 距離関数 d_1, d_2 は互いに同値であるという. 以下の間に答えよ.

- (i) X 上の 2 つの距離関数 d_1, d_2 が互いに同値であるためには, 各点 $x \in X$ と各 $\varepsilon > 0$ に対して,

$$U_\delta(x; d_2) \subset U_\varepsilon(x; d_1), \quad U_{\delta'}(x; d_1) \subset U_\varepsilon(x; d_2)$$

を満たすような $\delta > 0, \delta' > 0$ が存在することが必要十分であることを証明せよ. ただし, $U_\varepsilon(x; d_i)$ は距離関数 d_i に関する x の ε -近傍を表す ($i = 1, 2$).

- (ii) 距離空間 (X, d) に対し関数 $d' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定める.

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad (x, y \in X)$$

d' は X 上の距離関数であることを証明せよ.

- (iii) 任意の距離空間 (X, d) に対し, d と (ii) で定義される距離関数 d' は互いに同値であることを証明せよ.

[9] 正の実数 a, b, k に対して,

$$f(z) = \frac{e^{ikz}}{(z+a)^2 + b^2}$$

とする. また, R を正の実数として, 複素平面上の路 L_R, C_R を次のように定める:

- L_R : 実軸上を $z_1 = -R$ から $z_2 = R$ まで向かう路,
- C_R : 原点を中心とする半径 R の円上を, $z_2 = R$ から反時計回りに $z_1 = -R$ まで向かう路.

この2つの路を L_R, C_R の順に結んでできる反時計回りの閉路を $\tilde{C}_R$ とする.

- (i) $f(z)$ の極をすべて求めよ.
- (ii) (i) で求めた極それぞれについて, 位数, 留数を求めよ.
- (iii) 極限 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\tilde{C}_R} f(z) dz$ の値を求めよ.
- (iv) $R > a + b$ であるとする. z が C_R 上の点であるとき, 不等式

$$|(z+a)^2 + b^2| \geq (R-a)^2 - b^2$$

が成り立つことを示せ.

- (v) $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$ であることを示せ.
- (vi) 実定積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{(x+a)^2 + b^2} dx$ の値を求めよ.