2026 年 2 月 24 日 実施

2026 年度 （春季）

立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程数学専攻入学試験問題

（ 数 学 ）

〔注意〕**＊**合図があるまでこのページをめくらないこと.

1. 解答用紙が 3 枚, 計算用紙が 3 枚配られていることを確認せよ. そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ.
2. 配られたすべての解答用紙の左上に受験番号を記入せよ.
3. 解答はすべて解答用紙に記入し, 問題ごとに解答用紙 1 枚を使用せよ.
4. **線形代数の問題 ([1], [2]) から 1 題, 微分積分の問題 ([3], [4]) から 1 題, 専門科目の問題 ([5]∼[9]) から 1 題の, 計 3 題を選んで解答せよ.**
5. 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ.

線形代数

[1] 実数 a に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & -a & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える．このとき，以下の問に答えよ．

(i) A の固有値を求めよ．

(ii) A が対角化可能となる a の条件を求めよ．

(iii) A が対角化可能でない場合，$J = P^{-1}AP$ が A のジョルダン標準形となるような正則行列 P と，そのときの J を求めよ．

(iv) (iii) の場合，自然数 n に対して，A^n を求めよ．

[2] n を 2 以上の自然数とし，A, B を $AB = BA$ を満たす複素数を成分とする n 次正方行列とする．ただし，$A \neq O$ かつ $B \neq O$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(i) A の固有値 α に対する固有空間を V_α とする．このとき，B が定める $\mathbb{C}^n$ 上の線形写像

$$B : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad x \longmapsto Bx$$

を V_α 上に制限したものは，V_α 上の自己線形写像となることを示せ．

(ii) A, B は共通の固有ベクトルを持つことを示せ．

(iii) A, B がどちらも対角化可能であるならば，ある n 次正則行列 P が存在して，$P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ はどちらも対角行列となることを示せ．

微分積分

[3] 実数 α に対して，実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を満たす．このとき，以下の問に答えよ．

(i) 自然数 n に対し

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

で定まる実数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束することを示せ．

(ii) $p_{n,k} = \dfrac{n-k+1}{n^2}$ とおくとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_{n,k}$ を n を用いて表せ．

(iii) 自然数 n に対して，

$$c_n = \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + a_n}{n^2}$$

とする．このとき，

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} p_{n,k} a_k$$

を用いて

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{2}\alpha$$

であることを示せ．

[4] 実数 $s > 0$ に関する正項級数

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

について，以下の問に答えよ．

(i) $0 < s \leq 1$ のとき，広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$ と正項級数 A との大小関係を利用して，A が収束するかどうか判定せよ．

(ii) (i) と同様に，$s > 1$ のとき，正項級数 A が収束するかどうか判定せよ．

(iii) 正項級数 A の収束・発散性を利用して，次の 2 つの正項級数の収束・発散をそれぞれ調べよ．

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^3+3n}$　　　(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$

専門科目

[5] 1 を持つ可換環 R は整域であるとする．このとき，以下の問に答えよ．

(i) 0 が R の中で生成するイデアル $I = (0)$ は，素イデアルであることを示せ．

(ii)
$$R^2 = \{(a,b) \mid a,b \in R\}$$
は，R の和と積から自然に定まる演算を用いて環になる．R^2 が整域かどうかを判定せよ．

(iii) 元 $a \in R$ に対して，$f_a : R \to R$ を $r \in R$ に対し $f_a(r) = ar$ で定める．このとき，f_a が単射となるための a の必要十分条件を求めよ．

(iv) $|R| < \infty$ ならば，R は体となることを示せ．ただし，$|R|$ は R に含まれる元の個数とする．

[6] 2 の 3 乗根 $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$ と 1 の原始 3 乗根 $\omega \in \mathbb{C}$ を $\mathbb{Q}$ に添加した体
$$L = \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}, \omega\right)$$
を考える．このとき，以下の問に答えよ．

(i) 拡大次数 $[L : \mathbb{Q}]$ を求めよ．

(ii) L の自己同型写像 σ, τ を
$$\sigma(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}, \qquad \sigma(\omega) = \omega^2,$$
$$\tau(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\omega, \qquad \tau(\omega) = \omega$$
と定める．このとき，$\sigma\tau = \tau^2\sigma$ であることを示せ．

(iii) $\eta = \sqrt[3]{2}\omega$ とおき，L と $\mathbb{Q}$ との中間体を $K = \mathbb{Q}(\eta)$ とする．このとき，L の K 上のガロア群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ の生成元を σ, τ を用いて表せ．

(iv) L の元 $\xi = \sqrt[3]{2} + \omega$ の $K = \mathbb{Q}(\eta)$ 上のモニックな最小多項式を求めよ．

[7] X を $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を距離とする距離空間とするとき，以下の問に答えよ． ただし，X の位相は d から定まる距離位相とする．

(i) $x \in X$ のみからなる集合 $\{x\}$ は閉集合であることを示せ．

(ii) $d : X \times X \to \mathbb{R}$ は連続写像であることを示せ．ただし，$X \times X$ には積位相が入っているとする．

[**8**] $z=\log x$ を z 軸の周りに回転してできる曲面

$$S_1:\ (x,y,z)=(u_1\cos v_1,\ u_1\sin v_1,\ \log u_1)\quad (u_1>0, v_1\in\mathbb{R})$$

と常らせん面

$$S_2:\ (x,y,z)=(u_2\cos v_2,\ u_2\sin v_2,\ v_2)\quad (u_2>0, v_2\in\mathbb{R})$$

について，以下の問に答えよ．

(i) S_1 の第一基本量 E_1, F_1, G_1 を求めよ．

(ii) S_2 の第一基本量 E_2, F_2, G_2 を求めよ．

(iii) S_1, S_2 のガウス曲率をそれぞれ K_1, K_2 と表す．K_1, K_2 を求めよ．

(iv) $u_1=u_2$ となる対応点において，S_1, S_2 のガウス曲率について $K_1=K_2$ であることを示せ．

(v) $u_1=u_2$ となる対応は，S_1 と S_2 の間の等長写像であるかどうか，理由を付して答えよ．

[**9**] 複素関数 $f(z)$ を

$$f(z)=\begin{cases} \dfrac{z(i-z)}{e^{2\pi z}-1} & (z\neq 0, i) \\ \dfrac{i}{2\pi} & (z=0) \\ -\dfrac{i}{2\pi} & (z=i) \end{cases}$$

と定める．

正の実数 a をとる．$z=0$ から $z=a$ までの実軸上の経路を C_1，$z=a$ から $z=a+i$ までの虚軸に平行な経路を C_2，$z=a+i$ から $z=i$ までの実軸に平行な経路を C_3，$z=i$ から $z=0$ までの虚軸上の経路を C_4 とし，C_1, C_2, C_3, C_4 の順に反時計回りに一周する閉曲線を C とする．

(i) 複素線積分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求めよ．

(ii) $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_{C_2} f(z)dz=0$ を示せ．

(iii) 等式 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x}{e^{2\pi x}-1}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{y(1-y)}{e^{2\pi iy}-1}\,dy$ を示せ．

(iv) 等式 $\displaystyle\int_0^1\frac{y(1-y)}{e^{2\pi iy}-1}\,dy=\int_0^1\frac{y(1-y)}{e^{-2\pi iy}-1}\,dy$ を示せ．

(v) 広義積分 $\displaystyle I=\int_0^{\infty}\frac{x}{e^{2\pi x}-1}\,dx$ の値を求めよ．