

2025年7月13日 実施

2026年度（夏季）

立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程数学専攻入学試験問題

（数学）

[注意] ＊合図があるまでこのページをめくらないこと。

1. 解答用紙が3枚, 計算用紙が3枚配られていることを確認せよ. そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ.
2. 配られたすべての解答用紙の左上に受験番号を記入せよ.
3. 解答はすべて解答用紙に記入し, 問題ごとに解答用紙1枚を使用せよ.
4. 線形代数の問題 ([1], [2]) から1題, 微分積分の問題 ([3], [4]) から1題, 専門科目の問題 ([5]~[9]) から1題の, 計3題を選んで解答せよ.
5. 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ.

線形代数

[1] $s \in \mathbb{R}$ に対して, 行列 A_s を

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & s \end{pmatrix}$$

とおく. さらに線形写像 $f_s: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$f_s(\mathbf{x}) = A_s \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4)$$

と定める.

- (i) f_s が全射となるような $s \in \mathbb{R}$ を決定せよ. またその s について f_s の核 $\text{Ker } f_s$ を求めよ.
- (ii) f_s が全射でないとき, f_s の核 $\text{Ker } f_s$ の基底を 1 組求めよ. また f_s の像 $\text{Im } f_s$ の基底を 1 組求めよ.

[2] n を 2 以上の整数, $M_n(\mathbb{C})$ を複素係数 n 次正方行列の全体の集合とする. また, $A \in M_n(\mathbb{C})$ は $A^2 = A$ を満たすものとし, $r = \text{rank}(A)$ とおく.

- (i) A の固有値は 0 と 1 のみであることを示せ.
- (ii) A の固有値 0 の固有空間を V_0 , 固有値 1 の固有空間を V_1 とおく. V_0 と V_1 の次元を r を用いて表せ.
- (iii) A は対角化可能であることを示せ.

微分積分

[3] 関数 $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義する:

$$f(x) = 2e^x - x.$$

このとき、次の問いに答えよ。ただし、微分可能な関数に関する逆関数定理は証明せずに用いて良い。

- (i) f の像 $\text{Im } f$ を求めよ。
- (ii) C^1 級関数に対する逆関数定理を用いて、 f が微分可能な逆関数 f^{-1} を持つことを示せ。
- (iii) 任意の $x, y \in \text{Im } f, x \neq y$ に対し

$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| < |x - y|$$

が成り立つことを示せ。

[4] \mathbb{R}^2 を定義域とする 2 変数関数 $f(x, y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 - 2y^2$ を考える。

- (i) $f(x, y)$ の停留点を全て求めよ。
- (ii) (i) で求めた各停留点に対して、 $f(x, y)$ のヘッセ行列の行列式の値を求めよ。
- (iii) $f(x, y)$ の極値、およびそれらを与える点を全て求めよ。

専門科目

[5] 有理数全体の集合 \mathbb{Q} を加法 $+$ を演算とする加法群とみなす. 与えられた素数 p に対し, \mathbb{Q} の部分集合 G を次で与える:

$$G = \{mp^n \in \mathbb{Q} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

- (i) G は \mathbb{Q} の部分群であることを示せ.
- (ii) $\text{End}(G)$ を G の自己準同型写像全体のなす集合とする. $f_1, f_2 \in \text{End}(G)$ に対し, f_1 と f_2 の和 $f_1 + f_2$ を次のように定める:

$$f_1 + f_2 : G \longrightarrow G, \quad g \longmapsto f_1(g) + f_2(g) \quad (g \in G).$$

このとき, $+$ を加法として, $\text{End}(G)$ はアーベル群であることを示せ.

- (iii) $\text{End}(G)$ を (ii) で定めたアーベル群とし, 写像 $\varphi : \text{End}(G) \longrightarrow G$ を

$$\varphi(f) := f(1) \quad (f \in \text{End}(G), 1 \in G)$$

と定める. φ は群の準同型写像であることを示せ.

- (iv) (iii) で定めた群の準同型写像 $\varphi : \text{End}(G) \longrightarrow G$ に対し, 逆写像が存在することを示せ.

[6] \mathbb{F}_2 を 2 元体とし, $f(x) = x^6 + x^3 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ の根の一つを r とし, $K = \mathbb{F}_2[r]$ とする. このとき, K は \mathbb{F}_2 上の有限次元ベクトル空間である. K の \mathbb{F}_2 上の次元を s とおく.

- (i) K の元の個数は 2^s であることを示せ.
- (ii) $r^9 = 1$ であることを示せ. また, $r^3 \neq 1$ であることを示せ.
- (iii) $2^s - 1$ は 9 で割り切れることを示せ. ただし, ラグランジュの定理は証明せずに用いてよい.
- (iv) $f(x)$ が \mathbb{F}_2 上既約であることを示せ.
- (v) ガロア群 $\text{Gal}(K/\mathbb{F}_2)$ を求めよ. また拡大 K/\mathbb{F}_2 の中間体の個数を求めよ.

[7] xyz 空間における xy 平面上の曲線が, パラメータ $u \in I$ (ただし I はある区間) を用いて $\mathbf{c}(u) = (f(u), g(u))$ と表されているとする. ただし, $f(u), g(u)$ はどちらも C^2 級であり, I 上

$$\frac{df(u)}{du} > 0, \quad g(u) > 0, \quad \left\{ \frac{df(u)}{du} \right\}^2 + \left\{ \frac{dg(u)}{du} \right\}^2 = 1$$

を満たすとする. この曲線を x 軸のまわりに回転させてできる曲面を S とすると, S 上の点は次のようにパラメータ表示される:

$$\mathbf{p}(u, v) = (f(u), g(u) \cos v, g(u) \sin v), \quad 0 \leq v < 2\pi.$$

- (i) 曲面 S 上の点 $\mathbf{p}(u, v)$ における第一基本量 $E(u, v), F(u, v), G(u, v)$ をそれぞれ求めよ.
- (ii) 曲面 S 上の点 $\mathbf{p}(u, v)$ におけるガウス曲率 $K(u, v)$ は $f(u)$ にはよらず $g(u)$ のみで表されることを示せ.
- (iii) (??) の結果を利用して, ガウス曲率 $K(u, v)$ が場所によらず一定となるような $f(u), g(u)$ の例を与えよ.

[8] 2 変数関数 $\delta: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定める.

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & (x = y) \\ 0 & (x \neq y) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

- (i) $n > 0$ を正の整数とし, 写像 $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = n - \sum_{i=1}^n \delta(x_i, y_i) \quad \text{ただし, } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

と定める. このとき, d は \mathbb{R}^n 上の距離関数であることを示せ.

- (ii) $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ を原点, $r > 0$ を正の実数とすると,

$$B(\mathbf{0}; r) = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < r\}$$

とおく. $n = 2$ のとき, $B(\mathbf{0}; 2)$ を図示せよ.

- (iii) 正の整数 k に対し, $P_k = (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})$ とおく. 距離空間 (\mathbb{R}^n, d) において, 点列 $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ は $\mathbf{0}$ に収束するか判定せよ.

[9] 自然数 N に対して, 整数でない実定数 k が $-N < k < N$ を満たすとする. このとき $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{1}{(k^2 - z^2) \sin \pi z}$$

で定める. また, $i = \sqrt{-1}$ として, 複素平面上の 4 点 $N + \frac{1}{2} + Ni$, $-N - \frac{1}{2} + Ni$, $-N - \frac{1}{2} - Ni$, $N + \frac{1}{2} - Ni$ を頂点とする長方形に反時計回りの向きをつけた積分路を $C(N)$ に対して,

$$I(N) = \int_{C(N)} f(z) dz$$

とする. ただし, 次の不等式が成り立つことは, 証明せずに用いてよい:

- $||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$ ($z, w \in \mathbb{C}$)
- $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|$ ($f(z)$ は積分路 γ を含む領域で定義された複素関数).

(i) 留数定理を用いて, 次が成り立つことを示せ:

$$I(N) = 2i \left\{ \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^n}{k^2 - n^2} - \frac{\pi}{k \sin \pi k} \right\}.$$

- (ii) 実数 t に対して $z = N + \frac{1}{2} + ti$ とするとき, $|\sin \pi z| \geq 1$ であることを示せ. また, 実数 s に対して $z = s + Ni$ とするとき, $|\sin \pi z| \geq \sinh(N\pi)$ であることを示せ.
- (iii) 実数 t に対して $z = N + \frac{1}{2} + ti$ として,

$$J(N) = \int_{-N}^N f\left(N + \frac{1}{2} + ti\right) dt$$

とするとき, $\lim_{N \rightarrow \infty} J(N) = 0$ であることを示せ.

(iv) 実数 s に対して $z = s + Ni$ として,

$$K(N) = \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} f(s + Ni) ds$$

とするとき, $\lim_{N \rightarrow \infty} K(N) = 0$ であることを示せ.

- (v) $\pi = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 - 4n^2}$ であることを示せ.