

2004年度

## 立教大学大学院 理学研究科 物理学専攻 博士課程前期課程 入学試験問題 (物理学)

以下の注意事項をよく読み、遵守せよ。

- 配られた問題用紙と、全ての解答用紙に、受験番号と氏名を記入せよ。
- 物理学の試験は4問の大問からなり、全ての問題に解答しなければならない。また、大問1問につき、解答用紙1枚を用い、解答用紙の右上に大問の番号を記入せよ。
- 解答用紙が大問の数だけ配られている事を確認せよ。そうでない場合は举手して試験監督者に伝える事。
- 解答用紙の裏面を使用しても良いが、その場合は裏面にも解答が記入されている事を、表面の下部に 裏に続く と注意書きする事で示せ。裏面には受験番号・氏名の記入は不要である。
- 質問がある場合は静かに举手して試験監督者に伝える事。

I. 線密度と単位長さ当たりの電気伝導度がそれぞれ  $\lambda$ 、 $\rho$  である細い導線からなる半径  $a$  の円形状の閉回路がある。初期状態では、この円形回路は  $x$ - $y$  平面上に、回路の中心が原点と一致する様に置かれている。この状態で、 $(x, y, z) = (a, 0, 0)$  である円形回路上の点を  $A$  とし、同様に  $(0, a, 0)$ 、 $(-a, 0, 0)$ 、 $(0, -a, 0)$  の点をそれぞれ  $B$ 、 $C$ 、 $D$  とする。点  $A$  と  $C$  を固定し  $x$  軸回りに円形回路を回転させる事が出来る。以下の設問に答えよ。但し、導線の太さは無視出来るとし、重力や空気の影響は考えない。

1. 直径  $AC$  の周りに回転する場合、慣性モーメント  $I$  は  $\pi\lambda a^3$  となる事を示せ。
2. 初期状態で点  $B$  に、 $F\Delta t$  という大きさの撃力を瞬間的に  $+z$  方向に加え、その後、円形回路を直径  $AC$  の周りに  $x$  軸に対して右ネジの方向に一定角速度  $\omega$  で回転させる。 $F\Delta t$  の大きさを求めよ。
3. 初期状態で、 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  の方向に一定の電流  $J$  を円形回路に流すのに必要な起電力  $V$  とその時発生するジュール熱  $W$  を求めよ。
4. 上問の状態で、磁束密度  $B$  の一様な磁場を  $+y$  方向に、十分短い  $\Delta t$  の時間だけ瞬間的に発生させる事で円形回路全体に力のモーメントを加え、磁場が瞬間的に発生した後は一定角速度  $\omega$  で回転させたい。 $B$  を求めよ。また回路が回転する方向は  $x$  軸に対して右ネジの方向か、あるいはそれと反対方向か。

II. ハミルトニアン

$$H = \frac{p^2}{2m} + \alpha x^\gamma \quad (\alpha, \gamma \text{ は実定数})$$

で記述される力学系の安定性を不確定性原理に基づき調べる。最小不確定性関係  $\Delta p \Delta x \simeq \hbar/2$  から  $x \rightarrow \Delta x \simeq a$ 、 $p \rightarrow \Delta p \simeq \hbar/2a$  の対応関係が“有効”であるとして、以下の設問に答えよ。

1. この力学系が安定である為には“有効”ハミルトニアン

$$H = \frac{\hbar^2}{8ma^2} + \alpha a^\gamma$$

が極小値を持つことが必要である。この時、 $\alpha$ 、 $\gamma$  の満たすべき条件、及び  $a$  の表式を求めよ。

2. 基底状態での運動エネルギー  $T_g$ 、及びポテンシャルエネルギー  $V_g$  の表式を求め、ビリアル定理を検証せよ。
3. “有効”ハミルトニアンの手法を用いて1次元調和振動子(質量  $m$ 、角振動数  $\omega$ )の基底エネルギー準位  $E_g$  の表式を求めよ。
4. 角振動数  $\omega$  の準静的断熱変化に対応するエネルギーの応答を求め、古典論断熱不変量を決定し、Bohr-Sommerfeldの量子化条件と Heisenberg の量子化条件と比較検討せよ。

III. カノニカル・アンサンブル (平衡温度  $T$  [K]) の量子統計力学的性質は分配関数

$$Z(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta H} \quad (\beta = 1/kT)$$

で記述される。 $H$  は量子力学系のハミルトニアンである。この事を用いて、1次元調和振動子 (質量  $m$ 、角振動数  $\omega$ ) の量子論カノニカル・アンサンブルの熱特性に関する以下の設問に答えよ。

1. エネルギーレベルの離散性に基づき分配関数  $Z(\beta)$  の表式を求め、古典論分配関数  $Z_{cl}(\beta)$  と比較検討せよ。
2. エントロピー  $S$ 、エネルギー平均値  $E$  および比熱  $C$  の表式を求めよ。
3. 高温極限でのエントロピー、エネルギー、比熱それぞれの振る舞いを対応論的に考察せよ。
4. 低温極限でのエントロピー、エネルギー、比熱それぞれの振る舞いと熱力学第3法則 (Nernst-Planck の熱定理) との整合性を検証せよ。

IV. 光子の電子・陽電子対への変換に関する以下の設問に答えよ。

1.  $\gamma$  線がシンチレータ中に入射した際にはこの反応が起こると考えられているが、本当にこの反応は起こるのか、電子・陽電子を直接検出する事で確認する実験をしたい。電子加速器から制動放射として生成される  $\gamma$  線を、実験室に固定した薄い金属標的に入射させ標的の中から電子・陽電子が同時に生成するかどうかを調べる実験を行う。電子・陽電子は下図のように標的の外に飛び出すものとして、必要な測定量 (例: 電子の運動エネルギー) と、図中の「測定装置」と書かれた領域に必要な具体的な実験装置 (例: シンチレータ) のセットアップを一例考案し、配置や種類がわかる様、図解して説明せよ。
2. この反応の様な、素粒子・原子核の反応は通常量子力学的に記述される。一方、前問の実験においては電子と陽電子を決定論的に測定の可能な古典粒子とみなしてよい。その根拠を述べよ。
3.  $\gamma$  線は自由空間で電子・陽電子対生成する事が出来ない事を運動学的に示せ。一方物質中では、電子、又は陽電子と物質中の原子核がクーロン力で散乱する事で反応の前後での運動量・エネルギー保存則が満たされ、対生成反応が可能となる。始め静止していた原子核が反応時に反跳を受けるものとして、原子核を系を含めた運動量・エネルギー保存則から、対生成反応が起こる為の  $\gamma$  線の最低エネルギーを求めよ。原子核の静止質量を  $M$ 、電子と陽電子の静止質量を  $m_e$  とする。
4. 制動放射による  $\gamma$  線放出から電子・陽電子対生成までの過程に関与する相互作用は全て電磁相互作用である。この過程全体を、そのまま時間の向きに逆転させた現象は起こるか、起こらないか、物理学的な根拠を挙げて論述せよ。

必要であれば以下を用いてよい。

$$\hbar c \sim 2 \times 10^2 \text{ MeV}\cdot\text{fm} \quad (1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}), \quad c \sim 3 \times 10^8 \text{ m/s}, \quad m_e \sim 0.5 \text{ MeV}/c^2$$

ある系の全エネルギー  $E$  と系の静止 (不変) 質量  $m_0$ 、全運動量  $\mathbf{p}$ 、重心速度  $\mathbf{v}$  との間には  $E^2 = m_0^2 c^4 + |\mathbf{p}|^2 c^2$ 、 $E\mathbf{v}/c = |\mathbf{p}|c$  の関係が成り立つ。

