受験番号			

氏名 ____________________　　2006 年 2 月 実施

2006 年度
立教大学大学院 理学研究科 物理学専攻 博士課程前期課程 入学試験問題 (物理学)

以下の注意事項をよく読み、遵守せよ。

- 配られた問題用紙と、全ての解答用紙に、受験番号と氏名を記入せよ。
- 物理学の試験は 4 問の大問からなり、全ての問題に解答しなければならない。また、大問 1 問に付き、解答用紙 1 枚を用い、解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。
- 解答用紙が大問の数だけ配られている事を確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝える事。
- 解答用紙の裏面を使用しても良いが、その場合は裏面にも解答が記入されている事を、表面の下部に 裏に続く と注意書きする事で示せ。裏面には受験番号・氏名の記入は不要である。
- 質問がある場合は静かに挙手して試験監督者に伝えること。

I. 電場 $\vec{E}$ 及び磁束密度 $\vec{B}$ の磁場がそれぞれ x 軸、z 軸の正の向きに一様に存在する空間で、電場と磁場に垂直な方向に初速度を持つ電荷 $q(>0)$、質量 m の粒子の運動を考える。粒子の運動は非相対論的とする。z 方向には力が働かないので速度の z 成分は 0 とし、運動は xy 面内だけで考える。以下の設問に答えよ。

1. 速度の x 成分、y 成分をそれぞれ v_x、v_y とし、また $E = |\vec{E}|$、$B = |\vec{B}|$ として粒子が従う x 軸方向、及び y 軸方向の運動方程式を記せ。

2. 設問 1 の運動方程式から、v_x に対し時間に関する 2 階の微分方程式を導き、v_x に対する解を求めよ。ただし、$t = 0$ で $v_x = 0$ とする。

3. 設問 2 で得られた解を設問 1 の運動方程式に代入し、v_y に対する解を求めよ。ただし、$t = 0$ で $v_y = v_0$ とする。

4. 設問 2、3 で得られた解をもとに、この空間で粒子はどんな運動をしているか、簡潔に説明せよ。

II. 電荷密度や電流密度が存在しない真空中では電磁場に関する以下のマクスウェルの方程式が成り立つ。

$$\nabla\cdot\vec{E} = 0, \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0,$$
$$\nabla\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0, \qquad \nabla\times\vec{B} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$$

以下の設問に答えよ。なお、ϵ_0、μ_0 はそれぞれ真空中での誘電率と透磁率である。

1. デカルト座標系において、任意のベクトル $\vec{A}$ に対して以下のベクトル公式が成り立つことを示せ。

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

2. 電磁波の電場ベクトル ($\vec{E}$) と磁束密度ベクトル ($\vec{B}$) に関する以下の波動方程式を導け。必要なら、前問のベクトル公式を用いても良い。

$$\nabla^2\vec{E} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad \nabla^2\vec{B} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

3. $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$ が前問の波動方程式を満たすことを、$\vec{E}_0 = (0, E_0, 0)$、$\vec{k} = (k, 0, 0)$ の場合に対して示せ。ここで、$\vec{r} = (x, y, z)$ は位置ベクトル、$\vec{k}$ は波数ベクトル、ω は角振動数、$\vec{E}_0$ は定ベクトルである。なお、光速を c とすると $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = \omega/k$ である。

4. 前問で、電場 $(\vec{E}(\vec{r},t))$ と、$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$ ($\vec{B}_0$ は定ベクトル) となる磁場の振動の様子を図示し、$\vec{B}_0$ の 3 成分を E_0、ϵ_0、μ_0 を用いて示せ。また、波長 λ を求めよ。

III.

N 個の独立な粒子からなる系がある。おのおのの粒子は 2 つのエネルギー状態 (状態 1、状態 2) しか取り得ないとし、そのエネルギーを ϵ_1、ϵ_2 $(\epsilon_1 < \epsilon_2)$ とする。N 個のうち、N_1 個が状態 1 にあり、N_2 個が状態 2 にあるとする。このとき、系の全エネルギー E は $E = N_1\epsilon_1 + N_2\epsilon_2$ である。全系のエネルギー状態の数 W は、N 個の粒子から状態 2 にある粒子 N_2 個を選び出す組み合わせに等しい。したがって、エントロピー S はスターリングの公式 ($x \gg 1$ のとき、$\log x! \approx x(\log x - 1)$) を用いると、

$$\begin{aligned} S &= k_{\mathrm{B}} \log W \\ &= -Nk_{\mathrm{B}}\left[\frac{N_2}{N}\log\frac{N_2}{N} + \left(1 - \frac{N_2}{N}\right)\log\left(1 - \frac{N_2}{N}\right)\right] \end{aligned}$$

となる。ここで k_{B} はボルツマン定数である。以下の設問に答えよ。

1. N、ϵ_1、ϵ_2、k_{B} を用い、エントロピー S をエネルギー E の関数として表せ。

2. エネルギー E を温度の関数として表せ。

3. この系の比熱 C を求めよ。

IV.

質量が m、電荷が $q(>0)$、エネルギーが E の粒子が x の負の方向から以下の様なポテンシャルの壁に向かって等速直線運動をしている。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ V_0(>0) & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (a < x) \end{cases}$$

以下の設問に答えよ。但し、粒子の運動は非相対論的だとする。

1. 粒子を古典力学で扱った場合、粒子がポテンシャルの壁に到達した後、どのような運動をするか、$E > V_0$ の時と $E < V_0$ の時に分けて説明せよ。

2. 粒子を量子力学で扱った場合、以下の問に答えよ。
   (a) $x < 0$ における粒子のド・ブロイ波長 λ をプランク定数 h を用いて示せ。
   (b) $V(x) = 0$ の領域で成り立つシュレーディンガー方程式を示し、その一般解を求めよ。
   (c) $E < V_0$ のとき、$V(x) = V_0$ の領域で成り立つシュレーディンガー方程式を示し、その一般解を求めよ。

3. 2-(b)、(c) で求めた波動関数で境界条件を考慮すると $E < V_0$ であっても透過率が 0 でないことが分かる。この性質は一般に何と呼ばれているか。また、この性質を確認するためにはどのような実験を行えば良いか。