受験番号			

氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 2005年9月 実施

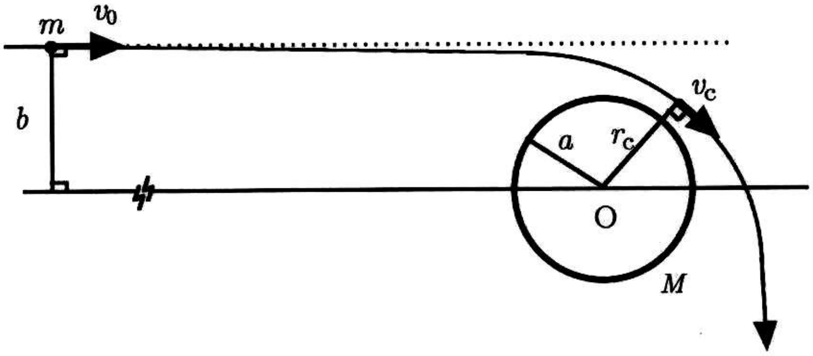
2006年度
立教大学大学院 理学研究科 物理学専攻 博士課程前期課程 入学試験問題 (物理学)

以下の注意事項をよく読み、遵守せよ。

- 配られた問題用紙と、全ての解答用紙に、受験番号と氏名を記入せよ。
- 物理学の試験は4問の大問からなり、IV-A と IV-B は選択問題である。また、大問1問に付き、解答用紙1枚を用い、解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。
- 解答用紙が大問の数だけ配られている事を確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝える事。
- 解答用紙の裏面を使用しても良いが、その場合は裏面にも解答が記入されている事を、表面の下部に 裏に続く と注意書きする事で示せ。裏面には受験番号・氏名の記入は不要である。
- 質問がある場合は静かに挙手して試験監督者に伝える事。

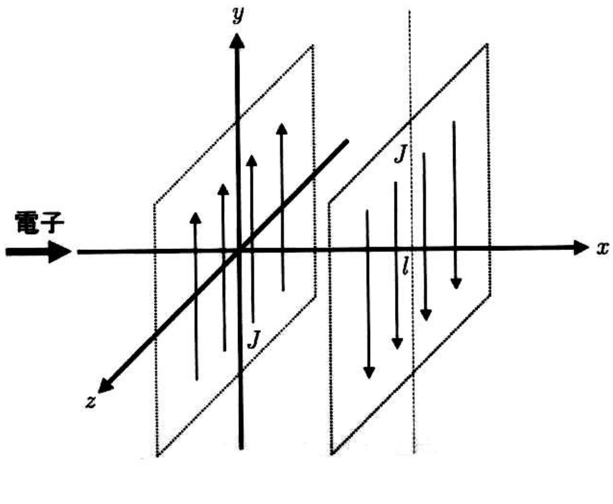
I. 遠方から飛んでくる隕石が地球と衝突するかどうか考える。隕石の質量を m、地球から十分遠方での速度を v_0、衝突係数を b とする。隕石と地球との間には重力ポテンシャル $V(r)=-G\dfrac{Mm}{r}$ (G: 重力定数、M: 地球の質量、r: 地球中心と隕石との距離) が働いており、地球の半径を a とする。但し、隕石の大きさは地球半径に比べ十分小さく無視できるとする。また、$m \ll M$ で、地球は原点 O に固定されているとしてよい。以下の問に答えよ。

1. 原点回りの隕石の角運動量はいくらか。
2. 最近接距離 r_c とそのときの速度 v_c を求めよ。
3. 隕石が地球に衝突しないためには b はいくら以上でなくてはならないか。



II. 真空内で、平面状の一様な電流が $x=0$ の無限平面内に $+y$ 方向に流れており、その電流密度が z 方向の単位長さ当たり J であるとする。同様に、$x=l$ の無限平面内を電流が $-y$ 方向に J の電流密度で流れているとする。以下の問に答えよ。但し、重力の効果は無視できるとする。

1. $0<x<l$ の領域 R での磁束密度ベクトル $\vec{B}$ が $\vec{B}=-\mu_0 J\vec{k}$ で表されることを示せ。また、それ以外の領域での磁束密度ベクトルは0になることを示せ。ここで、$\vec{k}$ は z 方向の単位ベクトルであり、μ_0 は真空の透磁率である。
2. x 軸上で、$-x$ 方向から $+x$ 方向に電位差 V で加速され、領域 R に入射した電子 (電荷 $-e$、質量 m) が領域 R を突き抜け $x>l$ の領域に侵入するための V の条件を示せ。
3. 領域 R を突き抜けた電子の速度方向と x 軸の正の方向との間の角度 θ を求めよ。



III. 以下の問に答えよ。

1. 原子の励起エネルギーは 10eV 程度なのに対し原子核の励起エネルギーは 5MeV 程度である。これと不確定性原理から原子と原子核の大きさの比を見積もれ。核子質量 M と電子質量 m との比 M/m は 2×10^3 としてよい。

2. 2 電子系を考える。いま、電子の状態 (スピンまで含める) は a、b の 2 状態が可能だとする。i 番目の電子が状態 m にある時の 1 電子波動関数を $\phi_m(i)$ とする (i は 1 または 2 であり、m は a または b である)。電子同士の相互作用を無視すれば、系の波動関数は $\phi_m(1)\phi_{m'}(2)$ であるが、電子は区別できないので電子を交換したものも考えて、全系の波動関数は

$$\phi_{\pm} = \phi_m(1)\phi_{m'}(2) \pm \phi_m(2)\phi_{m'}(1)$$

となる。電子の場合、フェルミ粒子であることを考慮すると、許される波動関数は電子交換に対し反対称な ϕ_- であることを示せ。

3. 古典力学ではポテンシャルの絶対値は粒子の運動に寄与しないことが知られている。しかし量子力学ではポテンシャルの絶対値の違いによって干渉現象が起きることがある。

(a) 波動関数 $\psi(\vec{x}, t)$ がシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\vec{\nabla}^2\psi + V(\vec{x})\psi$$

の解であるとしたとき、

$$\psi'(\vec{x}, t) = \exp\left(\frac{-iV_0(t - t_0)}{\hbar}\right)\psi(\vec{x}, t)$$

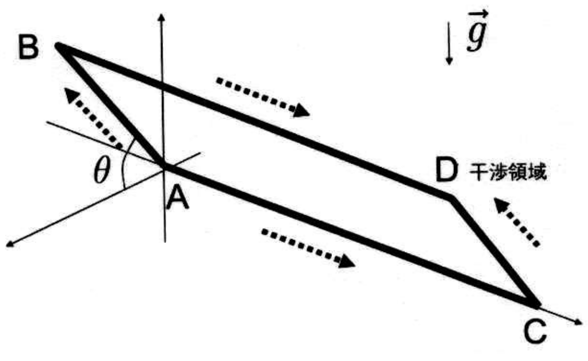
がやはりシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi' = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\vec{\nabla}^2\psi' + (V(\vec{x}) + V_0)\psi'$$

を満たすことを示せ。但し、ここで t_0, V_0 は定数とする。

(b) 重力ポテンシャル中のほとんどエネルギーと位相の揃った中性子ビームを考える。図の A で二つに分けられた中性子ビームが図のような 2 つの経路 ABD と経路 ACD を通り、D の干渉領域で干渉するものとする。このとき、二つの経路を飛んだ中性子の位相差を求めよ。但し、ABCD は長方形であるとし、AB= L_1、AC= L_2、長方形 ABCD と水平面とのなす角を θ とする。また、粒子のドブロイ波長を λ、重力加速度を g、中性子の質量を m とする。

(c) 角度 θ を 0 から $\pi/2$ まで変化させると、干渉領域での中性子線の強度は変化する。このとき、強度はおよそ何回変動するか。但し、$\lambda = 1 \times 10^{-10}$m、$L_1 = 0.02$m、$L_2 = 0.05$m、$m = 1.6 \times 10^{-27}$kg、$\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$J·s、$g = 9.8$m/s^2 とする。



以下のIV-AとIV-Bのどちらかを選択し、解答せよ。

IV-A. 以下の問に答えよ。

1. 二重積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2-y^2)dxdy$$

を極座標への座標変換を用いて実行せよ。また、この結果を用いて以下のガウス積分を求めよ。

$$\int_{0}^{\infty}\exp(-x^2)dx$$

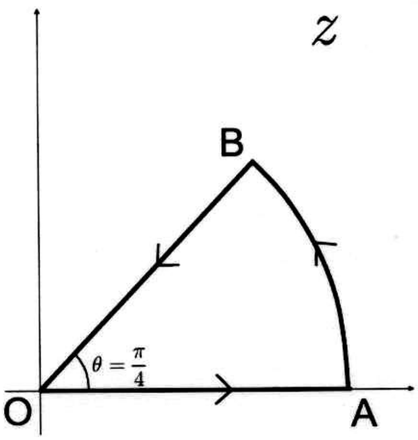
2. 積分

$$I_1=\int_{0}^{\infty}\sin(x^2)dx,\quad I_2=\int_{0}^{\infty}\cos(x^2)dx$$

を求めるために複素積分

$$I=\int_{C}\exp(-z^2)dz$$

を行うことを考える。前問の結果と複素積分の結果をあわせて I_1 と I_2 を求めよ。但し、経路 C は以下の図のような扇形OAB にとり、積分の後、OA(=OB) を無限大にする極限操作をするものとする。



IV-B. 固体を磁束密度 $\vec{B}$ の中におくと、各原子がエネルギー $\pm\mu B$ の 2 つの量子状態をもつ系とみなすことができる。ここで μ は原子の磁気モーメントの大きさである。以下の問に答えよ。但し、原子間の相互作用は無視できるものとする。

1. 原子の総数が N 個、系の温度を T、ボルツマン定数を k_B とするとき、系の分配関数とエントロピーを求めよ。

2. この系において、磁場を断熱的に弱くしていくことによって、温度を下げることができる。この原理について説明せよ。