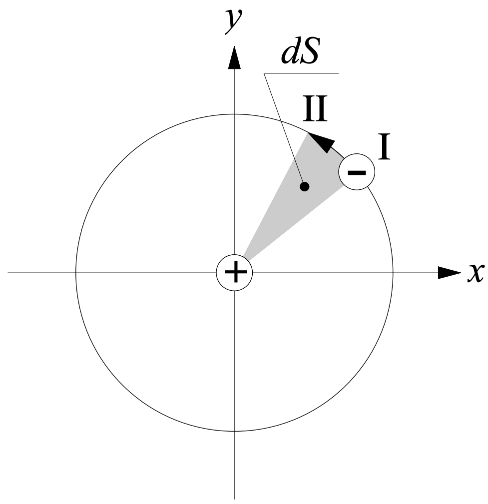
2010 年 2 月実施

２０１０年度
理学研究科物理学専攻博士課程前期課程　入学試験問題（物理学）

[注意]

- **配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ。**
- **大問は４題。全ての問題に解答すること。また，大問１問に付き解答用紙１枚を用い，解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。**
- **解答用紙が大問の数だけ配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。**
- **質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。**

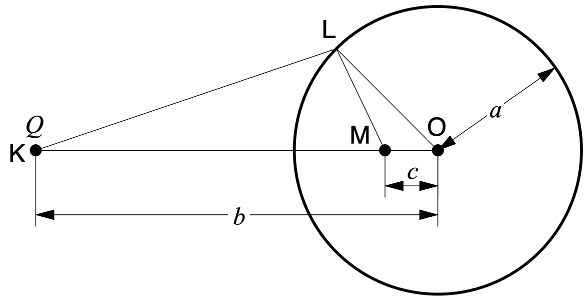
I. 図のように，$(x, y) = (0, 0)$ に点電荷（電荷 $+e$）が固定されている。その周りを大きさが無視できる粒子（質量 m，電荷 $-e$）が半径 R，角速度 ω の等速円運動をしている。回転運動をしている粒子からの輻射は無視でき，粒子の運動は xy 平面内に限るものとして，以下の問いに答えよ。真空の誘電率を ϵ_0 とする。



図

1. ある時刻において I の位置にある粒子が，微小時間 dt の間に II に移動した。この時間内に粒子の位置ベクトルが掃く面積 dS（図のグレーの部分）を求めよ。また，面積速度が時間によらず一定であることを示せ。
2. 粒子が回転する周期 T が $R^{\frac{3}{2}}$ に比例することを示せ。
3. この系の運動は，上の１（ケプラーの第２法則）と２（ケプラーの第３法則）に加えて，ケプラーの第１法則も成り立つ。このように，ケプラーの法則は太陽の周りを回っている惑星の運動以外に対しても成り立つ場合がある。ケプラーの３つの法則が成り立つのに必要な条件を簡潔に述べよ。

II. 図のように，真空中に絶縁された半径 a の導体球がある。導体球は帯電していない。その中心 O から b $(b > a)$ の距離にある点 K に電荷 Q の点電荷をおいた。このとき導体球の電位と，導体球と点電荷の間に働く力を，鏡像法を使って考える。以下の問いに答えよ。真空の誘電率を ϵ_0 とする。



図

1. 球面上の任意の点を L とする。OK 上に点 M をとり，三角形 OLM と OKL が相似形のとき，OM 間の距離 c を a と b で表せ。
2. 鏡像法を使って解くために，導体球の代わりに，点 M に電荷 q を置いた状態を考える。このとき O を中心とする半径 a の球面上の電位がどこでも同じになるように，q の値を求めよ。
3. 導体球は絶縁されているので導体球内の電荷の総量は 0 である。電荷の総量が 0 になるように中心 O にも鏡像電荷を置くことで，点 K に点電荷をおいた場合の導体球の電位を求めよ。
4. 導体球と点電荷の間に働く力の大きさと向きを求めよ。

III. 1 次元調和振動子を考える。この系のハミルトニアンは

$$\hat{h} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

で与えられるとし，消滅生成演算子を

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\hat{p}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\hat{p}\right) \tag{1}$$

とする。以下の問いに答えよ。ただしプランク定数を h とし，$\hbar = h/(2\pi)$ とする。

1. $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を用いて $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ を求めよ。
2. $\hat{h}$ を $\hat{a}$ および $\hat{a}^\dagger$ を用いて表せ。
3. $\hat{h}$ の基底状態の規格化された波動関数 $\psi_0(x)$ を求めよ。
4. さらに別の 1 次元調和振動子を考える。この系のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{1}{2M}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}M\Omega^2\hat{x}^2$$

で与えられるとし，消滅生成演算子を

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{M\hbar\Omega}}\hat{p}\right), \quad \hat{A}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{M\hbar\Omega}}\hat{p}\right) \tag{2}$$

とする。消滅生成演算子 (1) と消滅生成演算子 (2) の関係は

$$\hat{A} = \alpha\hat{a} + \beta\hat{a}^\dagger, \quad \hat{A}^\dagger = \alpha^*\hat{a}^\dagger + \beta^*\hat{a}$$

で与えられる。α および β を求めよ。さらに，$\hat{h}$ の基底状態に対する，$\hat{H}$ の期待値を求めよ。

IV. 以下の問いに答えよ。

1. 固有振動数 ω の 1 次元調和振動子のエネルギー固有値は

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

と離散化される。この調和振動子の分配関数を求めよ。さらに温度 T の熱平衡にあるときにエネルギー E が

$$E = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/(k_{\mathrm{B}}T)} - 1}$$

で与えられることを示せ。ただし，ボルツマン定数を k_{B}，プランク定数を h とし，$\hbar = h/(2\pi)$ とする。

2. 温度 T の黒体輻射において，振動数が ω と $\omega + d\omega$ の間にある電磁波の成分のエネルギー密度を $\epsilon(\omega)d\omega$ とすると

$$\epsilon(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/(k_{\mathrm{B}}T)} - 1}$$

と与えられる。1. で与えた調和振動子のエネルギーの表式を用いてこれを示せ。ただし，体積 V の容器内の電磁波について，偏極の自由度 2 を考慮すると，運動量空間における状態数密度は $2V/(2\pi\hbar)^3$ となる。また零点エネルギーの寄与は除くものとする。

3. 温度 T の黒体輻射のエネルギー密度 ϵ が $\epsilon = aT^4$ をみたすことを示し，定数 a の値を求めよ。ただし，以下の積分公式を用いてよい。

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx = \frac{\pi^4}{15}$$

4. 温度 T の黒体輻射において，波長が λ と $\lambda + d\lambda$ の間にある電磁波の成分のエネルギー密度を $u(\lambda)d\lambda$ とする。$u(\lambda)$ を求めよ。さらに，$u(\lambda)$ の長波長極限での振る舞いに関する法則であるレイリー・ジーンズの法則を導け。