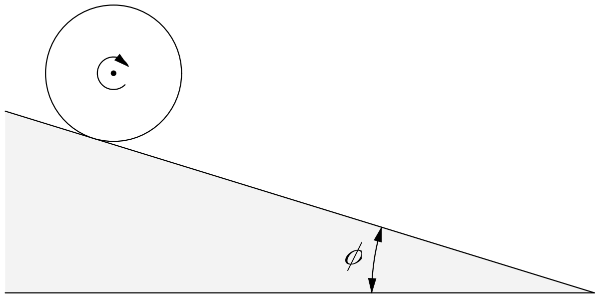
2009年7月実施

２０１０年度
理学研究科物理学専攻博士課程前期課程　入学試験問題（物理学）

[注意]

- **配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ。**
- **大問は４題。全ての問題に解答すること。また，大問１問に付き解答用紙１枚を用い，解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。**
- **解答用紙が大問の数だけ配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。**
- **質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。**

I. 厚さが十分に薄い円筒と，一様密度の円柱がある。図のように，それらを水平から角度 ϕ の坂道に置き，時刻ゼロで手を離した。円筒および円柱の長さ，半径，質量をそれぞれ l, a, M として，以下の設問に答えよ。



図

1. 円筒の中心軸まわりの慣性モーメントを求めよ。
2. 円柱の中心軸まわりの慣性モーメントを求めよ。
3. 慣性モーメントを I として，坂道をすべること無く転がるときの運動方程式を書け。なお，坂道に沿って下る方向を正として座標軸をとり，それを x 軸とする。
4. 運動エネルギー（並進と回転の両方を含む）K と位置エネルギー U を求めよ。転がるスタート位置を高さの基準とする。
5. ラグランジュ関数 L を x と $\dot{x}$ の関数として表し，ラグランジュの運動方程式を書け。
6. 円筒と円柱はどちらが早く転がるか。

II. 図 (a) のように，平面上で電荷 $-e$ の電子が電荷 $+e$ の原子核を中心として半径 a の円運動をしている。電子の角速度の大きさは ω_0 であり，角速度ベクトルはこの平面に垂直である。真空の誘電率を ε_0，透磁率を μ_0 として以下の設問に答えよ。

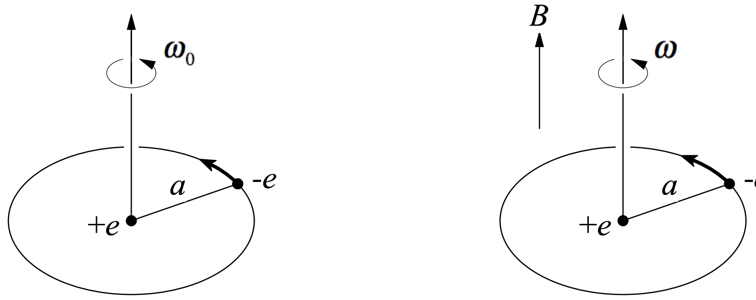


図 (a)　　図 (b)

1. 図 (a) で，電子に働く力の釣り合いを式で表せ。
2. 図 (b) のように，電子の軌道面に垂直に磁束密度 B の磁場を加えると，電子にはローレンツ力が働く。このとき，電子の軌道は変化せず，回転の角速度がわずかに変化したとする。このときの角速度の大きさを ω とする。磁場の方向と角速度ベクトルの方向が同じ場合，電子に働く力の釣り合いを式で表せ。
3. 磁場を加える前後での角速度の変化 $\omega - \omega_0$ を求めよ。ただし，加えた磁場の方向と角速度ベクトルの方向が同じ場合について計算せよ。ここで $\omega \approx \omega_0$ から $\omega^2 - \omega_0^2 \approx 2\omega(\omega - \omega_0)$ と近似できることを利用せよ。
4. 電子が角速度 ω で回転しているとき，電子の軌道運動によって生じる磁気モーメントの大きさ p_{m} はいくらか。
5. 磁場を加える前後での磁気モーメントの変化の方向は，加えた磁場の方向と反対になることを示せ。
6. 加えた磁場の方向が角速度ベクトルと反平行な場合も，磁気モーメントの変化の方向は加えた磁場の方向と反対となる。以上の考察は物理学のどのような現象の原因を説明しているか。

III. 以下の設問に答えよ。

1. フェルミ粒子，ボース粒子の具体例をそれぞれについて 1 個ずつ挙げよ。
2. 絶対零度で体積 V の容器に入った，質量 m，スピン 1/2 をもつ自由粒子の系を考える。運動量空間において，粒子は原点を中心に描いた半径 p の球の内部の状態を満たす。球の内部の量子状態の数はいくらか。
3. 設問 2 で，球の半径は，球内部の量子状態の数が系の全粒子数 N に等しいという条件で決まる。この系のフェルミ運動量 p_{F}，フェルミエネルギー ε_{F} および内部エネルギーを求めよ。ただし，粒子の運動は非相対論的である。
4. 次に設問 2 および設問 3 で述べた粒子系で，温度が有限で，$k_{\mathrm{B}}T \ll \mu_0$ の低温の場合を考える。ここで T は温度，$\mu_0(=\varepsilon_{\mathrm{F}})$ は絶対零度における化学ポテンシャル，k_{B} はボルツマン定数である。この粒子の系の比熱は温度に比例することを定性的に示せ。ここで熱的に励起される粒子は，そのエネルギー ε が $\varepsilon_{\mathrm{F}} - k_{\mathrm{B}}T \lesssim \varepsilon \lesssim \varepsilon_{\mathrm{F}}$ の領域にある状態を占めているものに限られることに注意せよ。また簡単のため，フェルミエネルギー近傍で状態密度 $D(\varepsilon)$ は一定で，$D(\varepsilon) \sim D(\varepsilon_{\mathrm{F}})$ とする。

IV. １個の原子を，図 (a) のような１次元の井戸型ポテンシャル $V(x)$ に質量 m の電子が１個束縛されている簡単なモデルで考える。ここで $V(x)$ は

$$V(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq L)$$
$$V(x) = \infty \quad (x < 0, x > L)$$

とする。以下の設問に答えよ。

1. この状態の電子の波動関数とエネルギー固有値 E_n^{A} を求めよ。n は状態を表す量子数である。
2. N 個の原子が原子核間距離 L で隣接し，電子が特定の原子に束縛されずに全体を自由に動き回れるようになった場合，電子の感じるポテンシャルは図 (b) で表される。このときの１電子のエネルギー E_n^{M} を求めよ。
3. 原子１個が１個の電子を出す場合，この井戸型ポテンシャル内に N 個の電子が存在し，一つの n に対して二つずつの電子が入りうる。N が十分大きい場合の全エネルギー E^{M} を求めよ。必要であれば
$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$
を用いよ。
4. N 個の原子が互いに十分離れていて全て基底状態 $(n = 1)$ にあった場合，系全体のエネルギーは NE_1^{A} となる。このエネルギーと設問３で求めた E^{M} の大小関係を，不確定性原理から定性的に論ぜよ。

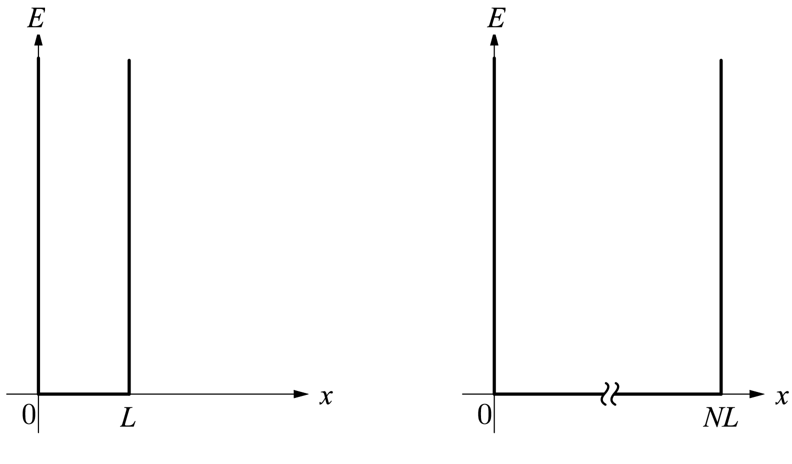


図 (a)　　　図 (b)