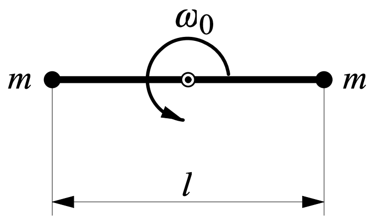
２０１１年度
理学研究科物理学専攻博士課程前期課程　入学試験問題（物理学）

［注意］

- 配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ。
- 大問は６題。
  ・理論物理学研究室を第１志望とする場合は大問１ ～ ４の４題を解答せよ。
  ・原子核放射線物理学研究室，または宇宙地球系物理学研究室を第１志望とする場合は，大問１ ～ ６のうち，４題を選択して解答せよ。
- 大問１問に付き解答用紙１枚を用い，解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。
- 解答用紙が４枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。

1. 図のように，両端に質量 m の質点がついた長さ l の棒が，その中心を通り紙面に垂直な軸の周りに角速度 ω_0 で回転している。棒の重さは無視できるものとして，以下の設問に答えよ。



(a) 回転軸の周りの慣性モーメント I_0 を求めよ。

(b) 回転軸の周りの角運動量 L_0 を求めよ。

(c) 回転の運動エネルギー E_0 を求めよ。

(d) 角速度 ω_0 で回転している状態から，二つの質点を回転中心に向かって，回転中心からの距離がそれぞれ $l/4$ のところまで移動させた。移動する前後での回転の運動エネルギーの変化 ΔE が，二つの質点を移動させるための仕事 W に等しいことを示せ。

2. (a) 被覆銅線を N_1 回巻いた断面積 S，長さ L_1 の円筒形ソレノイドがある。円筒の直径に比べて長さは十分に長いものとする。真空の透磁率を μ_0 として，次の (i), (ii) に答えよ。

(i) ソレノイドに直流電流 I を流したとき，ソレノイド内部の磁場の大きさ B を求めよ。

次に，このソレノイド円筒の側面に被覆銅線を N_2 回巻きつけ，巻き数 N_1 のソレノイドに交流電流 I_1 を流した。このとき，各瞬間で (i) で求めた関係が成立しており，$N_1 \gg N_2$ で，両端の効果は無視できるものとする。

(ii) 巻き数 N_2 の被覆銅線に誘導される起電力 V_2 は，相互インダクタンス L_{21} を使って，

$$V_2 = L_{21}\frac{dI_1}{dt}$$

と表すことができる。相互インダクタンス L_{21} を求めよ。

(b) 起電力 V の電池，自己インダクタンス L のコイル，抵抗値 R の抵抗で，図 1 のような閉回路を作り，スイッチ S を挿入した。スイッチを閉じたとき回路を流れる電流 I は，微分方程式

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V \tag{1}$$

を満たす。次の (i), (ii) に答えよ。

(i) 時刻 0（$t = 0$）にスイッチを閉じたとして，電流の時間変化 $I(t)$ を求めよ。

(ii) 次に，図 2 に示すように，電池を交流電源 E に置き換えてスイッチを閉じた。電源の出力電圧の振幅が V_0，角振動数が ω であるとき，次の $\boxed{\text{（イ）}}$ 〜 $\boxed{\text{（ヘ）}}$ にあてはまる適切な数式を記せ。

初期条件は特に定められていないので，複素数を使って電源電圧 V を

$$V = V_0 \exp(i\omega t) \tag{2}$$

と表す。ここで，i は虚数単位である。電流 I も角振動数 ω で振動するから，その振幅を I_0 として，電流を

$$I = \boxed{\text{（イ）}} \tag{3}$$

とする。ここで振幅 I_0 は複素数と考え，電源電圧との位相差も表すものとしている。

式 (2)，(3) を微分方程式 (1) に代入すれば，

$$I_0 = \frac{V_0}{\boxed{\text{（ロ）}}} \tag{4}$$

を得る。ここで実数 Z を使って（ロ）を

$$Z\exp(i\phi) \tag{5}$$

と書いたとき，

$$Z = \boxed{\text{（ハ）}} \tag{6}$$

$$\tan\phi = \boxed{\text{（ニ）}} \tag{7}$$

である。（ロ）を式 (5) で置き換えて（イ）に代入すれば,

$$I = \frac{V_0}{Z}\exp\left[i\left(\boxed{\text{（ホ）}}\right)\right] \tag{8}$$

となるが，この実数部をとって,

$$\mathrm{Re}(I) = \frac{V_0}{Z}\boxed{\text{（ヘ）}} \tag{9}$$

を得る。

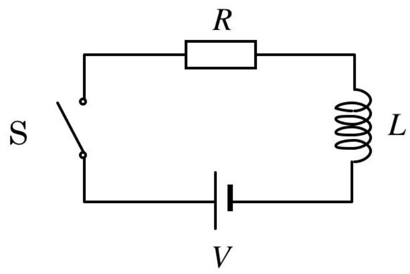


図 1

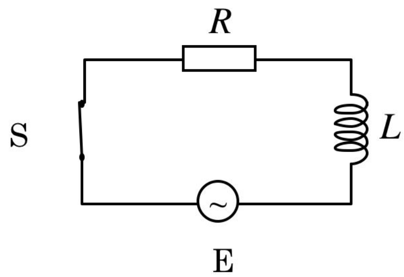


図 2

3. ファン・デル・ワールスの状態方程式,

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

(a, b は定数) を考える。ここで P, T, V はそれぞれ圧力，温度，体積，そして R は気体定数である。以下の設問に答えよ。

(a) 膨張率 $\alpha = \left(\frac{1}{V}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ 求めよ。

(b) U を内部エネルギーとするとき，$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ を求めよ。

(c) 定積比熱 C_V が温度のみの関数であることを示せ。

(d) 定圧比熱 C_P と定積比熱 C_V との差 $C_P - C_V$ を求めよ。

4. 真空のエネルギーを持った宇宙のモデルを考える。この宇宙のラグランジアンはスケール因子 a を使って

$$L = \frac{3\pi c^4}{4G}\left\{-a\left(\frac{\dot{a}}{c}\right)^2 + a - \frac{a^3}{l^2}\right\}$$

と表されるとする。ここで，G を重力定数，c を光速，$\rho_V c^2$ を真空のエネルギー密度とすると，$l = c\left(\frac{8\pi G\rho_V}{3}\right)^{-1/2}$ である。以下の設問に答えよ。

(a) 正準運動量を $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}}$ で定義するとき，ハミルトニアン H を求めよ。

(b) $H = 0$ から宇宙膨張の式が導かれる。その解はドジッター解と呼ばれ，$a(t) = a_0 l \cosh\left(\frac{ct}{l}\right)$ と書くことができる。このときの a_0 を求めよ。

(c) ハミルトニアンをさらに正準運動量を用いて書き直し，それをもとに，横軸を a，縦軸をポテンシャルエネルギーとしたグラフを描け。

5. ボーアのモデルを使って水素原子のエネルギー準位を求めよう。真空の誘電率：ϵ_0，電子の質量：m_e，素電荷：e，プランク定数：h とし，原子核の質量は電子の質量に比べて十分大きいとして良い。

(a) 電子は原子核（陽子）の周りを等速円運動しているものとして，電子に働く力の釣り合いの式を書け。電子の速度を v，軌道半径を r とせよ。

(b) ボーアの量子条件 $m_e vr = n\left(\dfrac{h}{2\pi}\right)$（$n$ は量子数）から，水素原子の原子核の周りを回っている電子のド・ブロイ波長 λ と軌道半径 r の関係を求めよ。

(c) 電子の軌道半径 r_n と全エネルギー E_n を求めよ。結果には λ，v，r を含めないこと。

(d) 原子番号 Z の原子核（電荷 $+Ze$）の周りに電子が 1 つしかないイオンのことを「水素様イオン」と呼ぶ。原子番号 Z の水素様イオンの電子の全エネルギーは，水素原子の場合と比べて何倍になるか。

6. 以下の $\boxed{（イ）}$ から $\boxed{（ヘ）}$ のそれぞれにあてはまる適切な数式あるいは記号を記せ。

時間的にランダムに発生する事象 A について考察する。微小時間 dt の間に事象 A が発生する確率は dt に比例する。この比例定数を r とすれば，rdt は確率で無次元であるから r の次元は T^{-1} である。時間 t の間に事象 A が発生する確率を $P(t)$ とすれば，時刻 t まで事象 A が発生しておらず，t と $t+dt$ の間で事象 A が発生する確率 $p(t)dt$ は，

$$p(t)dt = \boxed{（イ）} \tag{1}$$

となる。ここで，$\dfrac{dP(t)}{dt} = p(t)$ であることと，$P(t)$ の初期条件を考慮して (1) 式を積分すれば，

$$P(t) = \boxed{（ロ）} \tag{2}$$

を得る。これを (1) 式に代入して，

$$p(t) = \boxed{（ハ）} \tag{3}$$

となることがわかる。

上の議論で，時間の原点に特別な意味はないから，それをどこに置いても，(2) あるいは (3) 式は形を変えない。これはランダム事象の顕著な特徴である。したがって，$p(t)$ は事象 A が次々に発生する時間間隔の分布を表していると考えることができるから，その平均時間間隔 τ は簡単な積分から求めることができて，

$$\tau = \boxed{（ニ）} \tag{4}$$

となる。

一方，エネルギー E_γ の γ 線が，媒質中の微小距離 dx を進む間に光電効果を起こす確率は，dx に比例する。比例定数を k とすれば，k はその媒質の光電効果による吸収係数と呼ばれ，E_γ に依存する。いま，光電効果以外の相互作用が無視できる単一エネルギーの γ 線平行ビームが，吸収係数 k の媒質に入射したとする。媒質中を距離 x 進んだ位置における強度（単位時間にビームに垂直な単位面積を通過する γ 線の数）を $I(x)$ とすれば，そこから $x+dx$ まで進む間の強度変化 $dI(x)$ は，

$$dI(x) = \boxed{（ホ）} \tag{5}$$

となる。したがって，媒質に入射するときの強度を $I(0)$ とすれば，距離 x における強度は

$$I(x) = \boxed{（ヘ）} \tag{6}$$

と表すことができる。吸収係数 k の逆数を平均自由行程という。