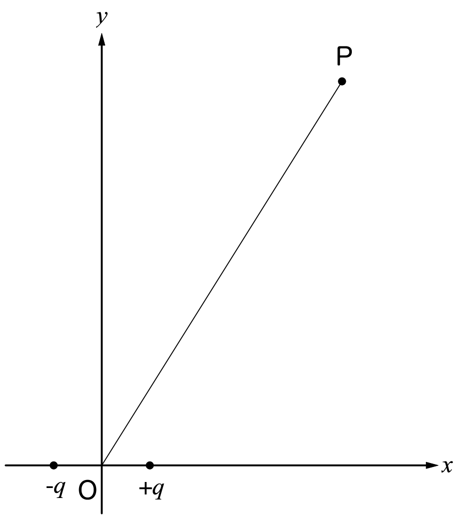
2010 年 7 月実施

２０１１年度
理学研究科物理学専攻博士課程前期課程　入学試験問題（物理学）

［注意］

- 配られた全ての解答用紙とグラフ用紙に受験番号を記入せよ。
- **大問は６題。**
  ・理論物理学研究室を第１志望とする場合は大問１ ～ ４の４題を解答せよ。
  ・原子核放射線物理学研究室，および宇宙地球系物理学研究室を第１志望とする場合は，大問１ ～ ６のうち，４題を選択して解答せよ。
- 大問 1 問に付き解答用紙 1 枚を用い，解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。
- 解答用紙が 4 枚とグラフ用紙が 1 枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。

1. 図のように，座標 $(a, 0, 0)$ のところに電荷 $+q$ を，座標 $(-a, 0, 0)$ のところに電荷 $-q$ を置いた $(q > 0, a > 0)$。原点 O $(0, 0, 0)$ から距離 r 離れた点 P$(X, Y, 0)$ における電位と電場を求めたい。原点 O から点 P までの距離を r，真空の誘電率を ϵ_0 として，以下の問いに答えよ。



図

(a) 点 P の場所に電荷 $+q$ が作る電位 ϕ_+，および電荷 $-q$ が作る電位 ϕ_- をそれぞれ求めよ。

(b) $a \ll r$ の場合に，点 P の電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ が，電気双極子モーメント（双極子ベクトル）$\boldsymbol{p}$ を用いて

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$$

で表されることを示せ。必要ならば近似式 $(1+x)^n \simeq 1 + nx \quad (|x| \ll 1)$ を用いてよい。

(c) xy 平面内での等電位面と電気力線を図示せよ。

(d) 電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

2. 以下の問いに答えよ。重力加速度を g とする。

(a) 図 1 のように，長さ ℓ で重さの無視できる曲がらない棒の片端に質量 M の質点 A，他方の片側に質量 m の質点 B を付けた。質点 A から長さ a のところを回転軸とする振り子の微小振動の周期を求めよ。振動は鉛直面内の平面運動とする。但し，振り子は質点 A が下にあるときに安定である。鉛直方向からの振れ角を θ とする。

(b) 長さ 2ℓ で，重さの無視できる針金の両端に質量 m の質点を付けた後，針金の真ん中で開き角が 2α となるように折り曲げた。図 2 のように，その折り曲げ点が支点になるように尖った台にのせてヤジロベーを作った。このヤジロベーの微小振動の周期を求めよ。ヤジロベーはある鉛直面内にあり，その面内での振動とする。なお，振動中，針金は曲がらないとする。

(c) 重さの無視できる曲がらない針金に，半径 a で太さの無視できる質量 M のリングを固定し，天井からつるした。図 3 のように，リングも針金も同一のある鉛直面内にあり，その面内での微小振動を考えよう。なお，支点からリングの中心までの長さを ℓ とする。鉛直方向からの振れ角を θ とする。

   i. この運動のラグランジュ関数を求めよ。
   ii. ラグランジュの運動方程式を書け。
   iii. 微小振動を仮定してラグランジュの運動方程式を解いて振動の周期を求めよ。

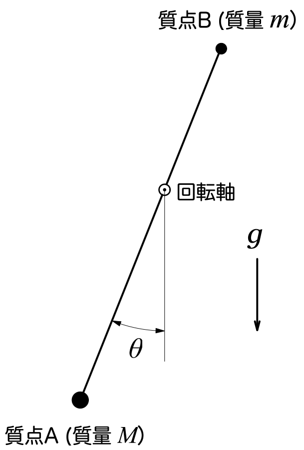


図 1

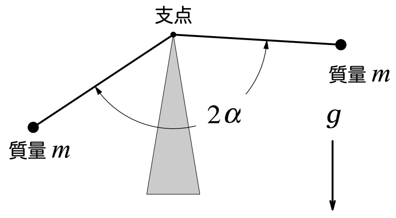


図 2

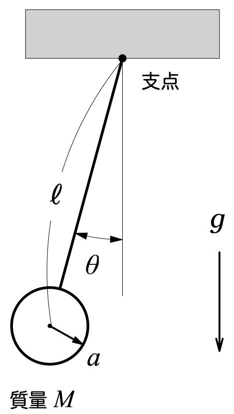


図 3

3. 電磁場中の電荷 e をもつ質量 m の粒子の運動を表すハミルトニアンは，

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\boldsymbol{p}} - e\boldsymbol{A}\right)^2 + e\phi$$

と書ける。ここで，$\boldsymbol{A}, \phi$ はそれぞれベクトルポテンシャルおよびスカラーポテンシャルであり，電場 $\boldsymbol{E}$ および磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ および $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ でそれぞれ与えられる。以下では静磁場のみが存在する場合を考えよう。

(a) ベクトルポテンシャルのとり方は一意的ではなく，$\chi(\boldsymbol{r})$ を $\boldsymbol{r}$ の任意関数として $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi$ をベクトルポテンシャルとしても，同じ磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を与えることを示せ。

(b) (a) のようにベクトルポテンシャルを取りかえたとする。このとき荷電粒子の波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ の位相を $\psi'(\boldsymbol{r}) = \exp[iS(\boldsymbol{r})]\,\psi(\boldsymbol{r})$ のように変えることにより，シュレディンガー方程式が χ を変えても不変になることを示し，その時の $S(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

次に，z 軸正の向きの一様な磁場を考えよう。磁束密度の大きさを B とする。

(c) $\boldsymbol{A} = (0, A_y(x), 0)$ と仮定してベクトルポテンシャルを具体的に求め，電子のハミルトニアンを書き下せ。

この磁場の下で xy 平面上を運動する電子を考える。この電子の波動関数は $\psi(\boldsymbol{r}) = \psi(x, y)$ となるようにとることができる。

(d) 電子のハミルトニアンが一次元調和振動子のハミルトニアンと等価になることを示し，電子のエネルギー固有値を求めよ。ただし波動関数の境界条件としては無限遠で有界であるとせよ。

4. 強さ H の一様な外部磁場中で，磁場に対して同じ向き (上向き) または逆向き (下向き) の状態のみをとることのできる磁気モーメント μ をもつ原子が N 個ある。N は十分大きいとする。i 番目の原子の状態を σ_i で表そう。すなわち，上向きのとき $\sigma_i = +1$，下向きのとき $\sigma_i = -1$ である。$m \equiv (\sum_{i=1}^{N} \sigma_i)/N$ の温度 T での期待値 $\bar{m}(T,H)$ を以下の手順にしたがって考察しよう。

まず原子間相互作用が無視できる場合を考えよう。このとき全エネルギーは

$$E = -h \sum_{i=1}^{N} \sigma_i$$

によって与えられる。ここで $h = H\mu$ である。

(a) 与えられた m に対して，可能な微視状態の総数 $W(m)$ およびエントロピー $S(m) \equiv k_{\mathrm{B}} \ln W(m)$ を求めよ。ここに k_{B} はボルツマン定数である。必要ならばスターリングの公式

$$\ln N! \simeq N(\ln N - 1)$$

を用いよ。

(b) $S(m)$ と $E(m)$ より自由エネルギー $F(m) \equiv E(m) - TS(m)$ を作り，F の最小条件より $\bar{m}$ を求めよ。

次に，各々の原子が磁気モーメントを通じて他の $(N-1)$ 個のすべての原子と等しい強さで相互作用する場合を考えよう。このとき

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} K_{ij} \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^{N} \sigma_i, \quad K_{ij} = \begin{cases} K/N & (i \neq j) \\ 0 & (i = j) \end{cases}$$

となる。ここに $K > 0$ とし、$h = H\mu$ とする。

(c) 形式的に

$$E = -\tilde{h} \sum_{i=1}^{N} \sigma_i, \quad \tilde{h} = h + \frac{1}{2} mK$$

と書かれることに着目して，$F(m)$ の表式を求めよ。更に m を微小量と仮定しオーダー m^4 までの近似で F を表せ。

(d) $H = 0$ として温度を下げていくとき，ある温度 T_c 以下ではマクロな磁化 $\mathcal{M} = N\mu\bar{m}$ が自発的に生じる。$\mathcal{M}$ の温度および磁場に対する依存性は漸近的に

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\propto (T_c - T)^{\beta}, \quad (T < T_c \text{ かつ } T \simeq T_c,\ H = 0 \text{ のとき}) \\ \mathcal{M} &\propto |H|^{1/\delta}, \quad (T = T_c,\ H \simeq 0 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

と表される。温度 T_c および指数 β, δ の値を求めよ。

5. 次の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{ケ}}$ を適切な数式あるいは物理用語で記せ。なお，必要なら

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx) = \frac{1}{1-\exp(-x)} \qquad (x>0)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx\exp(-nx) = \frac{x\exp(-x)}{[1-\exp(-x)]^2} \qquad (x>0)$$

を利用してよい。

黒体放射について考察してみよう。振動数 ν の光子のエネルギーと運動量の大きさは $E = \boxed{\text{ア}}$，$p = \boxed{\text{イ}}$ と書くことができる。単位体積あたりの位相空間で，運動量の大きさが p と $p+dp$ の間にある状態の数は $\boxed{\text{ウ}}\,dp$ である。ここで，光子の偏光方向によりふたつの異なる状態があることを考慮した。この状態数は振動数 ν で書き表すと，$\boxed{\text{エ}}\,d\nu$ と書くことができる。

さて，光子は $\boxed{\text{オ}}$ 粒子であるので，ひとつの状態に複数存在することができる。温度 T では，各状態に振動数 ν の光子が n 個存在する確率は $\exp[-(n+\frac{1}{2})\frac{h\nu}{kT}]$ に比例する。なお，ここで零点振動に対応するエネルギー $\frac{1}{2}h\nu$ を考慮した。温度 T の時，ある状態に振動数 ν の光子が n 個存在する確率を $P_n(\nu,T)$ とし，正規化定数を含めて書き下すと，

$$P_n(\nu,T) = \frac{\exp[-(n+\frac{1}{2})h\nu/kT]}{\sum_{n'}\left(\boxed{\text{カ}}\right)}$$

である。n の平均値 $<n>$ を計算すると

$$<n> = \frac{1}{\boxed{\text{キ}}}$$

となる。

さらに，各状態に含まれる振動数 ν の光子の合計エネルギーの平均値 (ここでは零点振動のエネルギーは除く)$<\epsilon>$ は，

$$<\epsilon> = \boxed{\text{ク}}$$

と書くことができる。

したがって，温度 T での，零点振動のエネルギーを差し引いた，振動数が ν と $\nu+d\nu$ の間にある光子の単位体積あたりのエネルギー $\rho(\nu,T)d\nu$ は，

$$\rho(\nu,T)d\nu = \boxed{\text{ケ}}\,d\nu$$

と書くことができる。

6. ある放射性同位元素の半減期を求める実験を行った。以下の問いに答えよ。

(a) 放射性同位元素の崩壊の種類を２つ挙げよ。また，それぞれの崩壊について原子番号・質量数はどのように変化するかを記せ。

(b) ある放射性同位元素から放出される放射線の強度をある時刻から 10 分おきに 1 秒間ずつ測ったところ，表のような値になった。表のデータを配付した片対数グラフ用紙に表せ。

(c) 0, 50, 100 分の信号数の統計誤差を計算し，グラフに誤差棒を記入せよ。

(d) この放射性同位元素の半減期をグラフから求めよ。

表：1 秒当たりの放射線の強度の測定値

時間（分）	信号数
0	501
10	389
20	297
30	232
40	196
50	142
60	109
70	90
80	60
90	51
100	38