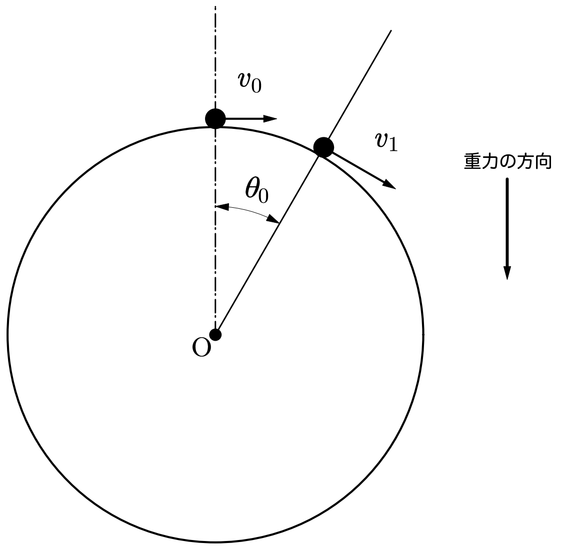
2012 年 2 月実施

２０１２年度
理学研究科物理学専攻博士課程前期課程　入学試験問題（物理学）

[注意]

- 配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ。
- 大問は 6 題。
  ・理論物理学研究室を第１志望とする場合は大問１ ～ ４の４題を解答せよ。
  ・原子核放射線物理学研究室，または宇宙地球系物理学研究室を第１志望とする場合は，大問１ ～ ６のうち，４題を選択して解答せよ。
- 大問 1 問に付き解答用紙 1 枚を用い，解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。
- 解答用紙が 4 枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。

1. 図のように，半径 R の球面上に 置かれた質量 m の質点が球の頂上から初速度 v_0 で滑り落ちるとする。重力加速度を g，摩擦は無視できるものとして，以下の問いに答えよ。



(a) 質点が球の頂上から角度 θ_0 だけ滑り降りた時の質点の速度の大きさ v_1 を求めよ。

(b) 角度 θ_0 の時の垂直抗力 N の大きさを求めよ。

(c) 質点が球面上を滑り落ち続けると，そのうち球面から離れる。その時の角度 θ_1 を求めよ。

(d) 初速度 v_0 がある値よりも大きい場合，質点は球面を滑ることなく球の頂上から直ちに球面を離れる。このときの v_0 の条件を求めよ。

2. 以下の問いに答えよ。ただし，真空の誘電率を ϵ_0 とする。

(a) 図 1 に示すように，真空中で x 軸上の $x = a \ (a > 0)$ の位置に電荷の大きさ q の点電荷を置き，$x < 0$ の領域全体に導体を置いた。

i. $x > 0$ の領域の電位 $\phi(x, y, z)$ を求めよ。ただし，無限遠でのポテンシャルを 0 とする。

ii. 導体の境界面上に生じる誘導電荷の分布を求めよ。

iii. 点電荷が受ける力の大きさを求めよ。

iv. 点電荷を無限遠から $x = a$ の位置までもってくるために必要な仕事（静電エネルギー）を求めよ。

(b) 図 2 に示すように，真空中で x 軸上の $x = a \ (a > 0)$ の位置に電荷の大きさ q の点電荷を置き，$x < 0$ の領域全体に誘電率 ϵ の誘電体を置いた。

i. $x > 0$ の領域の電位 $\phi_{\mathrm{I}}(x, y, z)$ 及び $x < 0$ の領域の電位 $\phi_{\mathrm{II}}(x, y, z)$ を求めよ。ただし，無限遠でのポテンシャルを 0 とする。

ii. 誘電体の境界面上に生じる分極電荷の分布を求めよ。

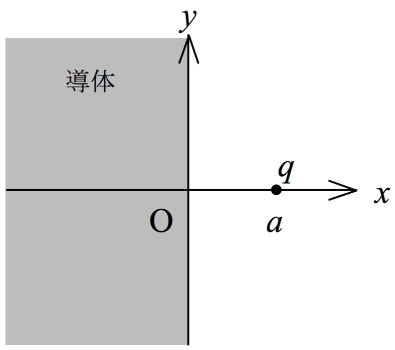


図 1

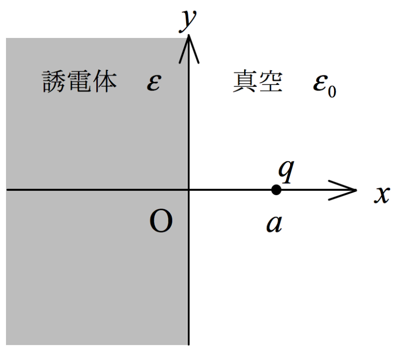


図 2

3. 中心力場中のシュレーディンガー方程式は，時間を含まない波動関数を $u(\mathbb{X})$ として，

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\left(|\mathbb{X}|\right)\right\} u(\mathbb{X}) = Eu(\mathbb{X})$$

と書ける。以下の問いに答えよ。

(a) $\mathbb{X}$ を極座標 (r, θ, ϕ) で表すと，

$$x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta$$

であり，

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

となる。波動関数 $u\left(r, \theta, \phi\right)$ は，動径方向の関数 $R(r)$ と球面調和関数 $Y(\theta, \phi)$ を用いて，$u(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$ と書くことができる。この球面調和関数 $Y(\theta, \phi)$ が満たす方程式を求めよ。

(b) 球面調和関数 $Y(\theta, \phi)$ は $\Theta(\theta)$ と $\Phi(\phi)$ に変数分離ができ，$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ と書ける。この $\Theta(\theta)$ と $\Phi(\phi)$ が満たす方程式を求めよ。

(c) 球面調和関数の解は

$$Y_{lm}\left(\theta, \phi\right) = (-1)^{(m+|m|)/2}\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)\exp(\mathrm{i}m\phi)$$

となる。ここで $l = 0, 1, 2, \dots$ ， $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ， $-l \leq m \leq l$ であり，$P_l^m(z)$ は，

$$P_l^m(z) = \frac{1}{2^l l!}\left(1 - z^2\right)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dz^{l+m}}\left(z^2 - 1\right)^l$$

である。$l = 1$ の場合の球面調和関数を求めよ。

(d) 球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ を空間反転 $(\mathbb{X} \to -\mathbb{X})$ したとき，$A \times Y_{lm}(\theta, \phi)$ と表せる。この A の値を求めよ。

4. 質量 m，振動数 ν の古典的な 1 次元調和振動子が多数独立に存在し，絶対温度 T の熱平衡状態にあるとする。以下の問いに答えよ。必要であれば以下のガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (a > 0)$$

を用いてよい。

(a) 振動子 1 つあたりのカノニカル分布の分配関数 $Z_1(T)$ を計算せよ。

(b) 単位体積あたり ρ 個の調和振動子があるとする。ヘルムホルツの自由エネルギー密度 $f(T, \rho)$ を求めよ。

(c) 上で求めたヘルムホルツの自由エネルギー密度 $f(T, \rho)$ より，エントロピー密度 $s(T, \rho)$ を導け。

(d) エントロピー密度 $s(T, \rho)$ から，単位体積あたりの定積比熱は

$$\overline{C}_V = T\frac{\partial s}{\partial T}$$

で与えられることを，熱力学関係式から導け。

(e) 単位体積あたりの定積比熱は

$$\overline{C}_V = \rho k_{\mathrm{B}}$$

で与えられることを示せ。

5. 長さ L の 1 次元の箱に束縛された 1 個の粒子（質量：m）について考える。ポテンシャルを

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \left(-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}\right) \\ \infty & \left(x < -\frac{L}{2},\ x > \frac{L}{2}\right) \end{cases}$$

として，以下の問いに答えよ。

(a) 規格化された固有関数 $\psi_n(x)$ が，n を 1 以上の整数として

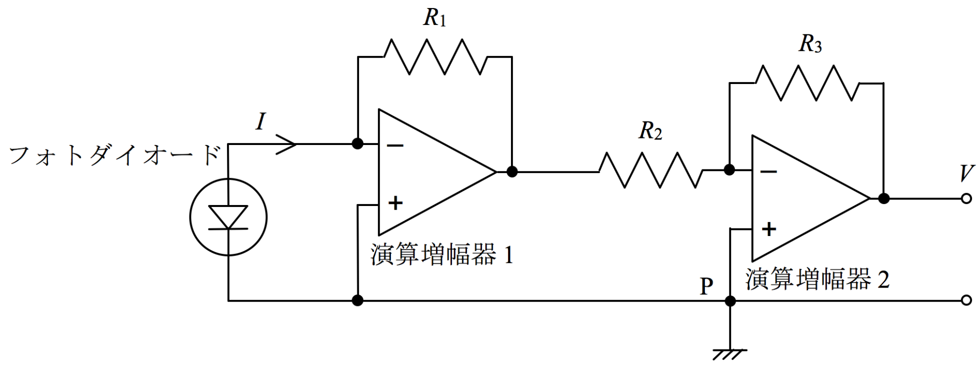
$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) & (n：\text{奇数}) \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) & (n：\text{偶数}) \end{cases}$$

となることを示し，エネルギー固有値 E_n を求めよ。

(b) 波動関数の形を $n = 1, 2, 3$ について図示せよ。

(c) この粒子の位置座標 x の期待値 $< x >$ と運動量 p の期待値 $< p >$ を求めよ。

6. 光の強度を計測するため，図に示すようなフォトダイオードと演算増幅器を使った回路を用意した。フォトダイオードは，入射した光の強度に比例した電流（光電流）を発生する光センサーである。演算増幅器の入力バイアス電流，入力オフセット電圧，出力インピーダンスは 0 であり，差動利得，入力インピーダンスは無限大であるとする。以下の問いに答えよ。



(a) この回路の光電流 I と出力電圧 V は

$$V = AI \qquad A = \frac{R_1 R_3}{R_2}$$

という比例関係になる。ただし図に示す矢印の方向を電流の正の方向とし，点 P における電位を 0 とする。使用する抵抗の値には製造時の系統的なバラツキがあり，それは偶然の要因によるバラツキよりも遙かに大きいとする。全ての抵抗値の系統誤差率が等しいとき，電流電圧変換係数 A の誤差率を 3%以下にするためには，系統誤差率が何%以下の抵抗値を使用すればよいか求めよ。

(b) この回路の電流電圧変換係数 A を求めるために，フォトダイオードの代わりに電流源を使って，入力電流値と出力電圧値を 10 回計測した。測定された電流値・電圧値及びそれらの数値の自乗を表に示す。さらにそれらの 10 個の数値の和を表の最下行に示してある。偶然の要因によって電流・電圧測定値にバラツキが生じたとみなし，表に示された数値を使って，電流電圧変換係数 A の値を誤差付きで求めよ。

表

測定回数	$I(\mu\mathrm{A})$	$I^2(\mu\mathrm{A}^2)$	$V(\mathrm{V})$	$V^2(\mathrm{V}^2)$
1	1.003	1.006009	1.044	1.089936
2	1.003	1.006009	1.056	1.115136
3	0.997	0.994009	1.042	1.085764
4	0.996	0.992016	1.055	1.113025
5	1.000	1.000000	1.055	1.113025
6	1.001	1.002001	1.044	1.089936
7	0.996	0.992016	1.054	1.110916
8	1.001	1.002001	1.059	1.121481
9	0.998	0.996004	1.045	1.092025
10	1.005	1.010025	1.046	1.094116
合計	10.000	10.000090	10.500	11.025360

(c) フォトダイオードに波長 633 nm の光をあてたところ，8.0 μA の光電流が流れた。光子 1 個がフォトダイオードに入射した時に 1 対の電子と正孔が発生する確率を量子効率と呼ぶ。このフォトダイオードの量子効率を 0.80 として，フォトダイオードに入射する光のパワー（光子 1 個あたりのエネルギー × 単位時間あたりに入射する光子の数）を有効数字二桁で求めよ。