2012 年 7 月実施

２０１３年度
理学研究科物理学専攻博士課程前期課程　入学試験問題（物理学）

[注意]

- 配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ。
- 大問は 6 題。
  ・理論物理学研究室を第１志望とする場合は大問１ ～ ４の４題を解答せよ。
  ・原子核放射線物理学研究室，または宇宙地球系物理学研究室を第１志望とする場合は，大問１ ～ ６のうち，４題を選択して解答せよ。
- 大問 1 問に付き解答用紙 1 枚を用い，解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。
- 解答用紙が 4 枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。

1. 質量 m の球を，時刻 $t=0$ で初期位置 $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ から初速度 $\vec{v}_0 = (U_0, 0, W_0)$ で打ち出す。鉛直上方を z 軸の正方向とし，重力加速度の大きさを g とする。考えている時間内には球が地面に到達することはないものとして，以下の問いに答えよ。

(a) 空気抵抗は無視できるものとして，時刻 t の時の球の速度ベクトルの方向と z 軸とのなす角度 θ を求めよ。

(b) 速度に比例する抵抗力（粘性抵抗力）を受ける場合の球の運動を考えよう。抵抗力の比例定数は $b\ (>0)$ であり，高度に依存しないとする。

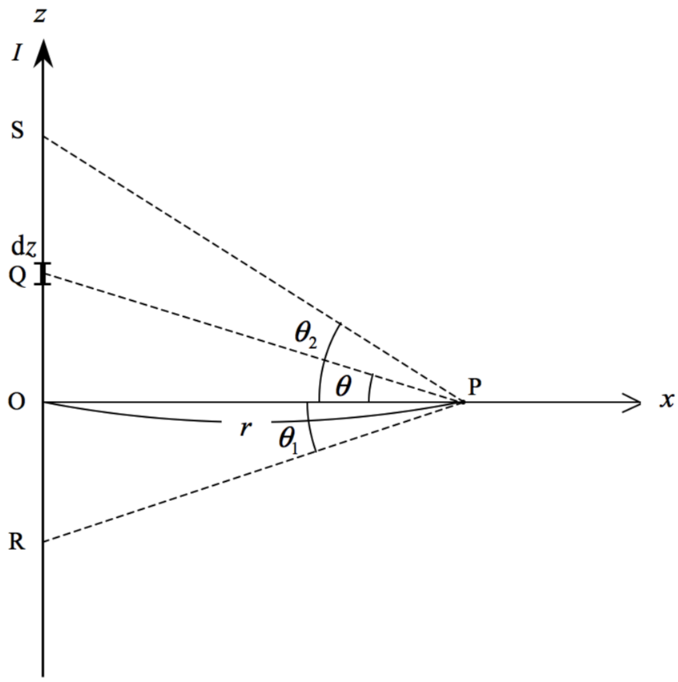
i. x 方向，y 方向，z 方向の運動方程式を書け。

ii. x 方向，y 方向の運動方程式を解き，十分時間が経ったときの速度の x, y 成分を求めよ。

iii. 十分時間が経ったときの z 軸方向の速度（終端速度）を求めよ。

iv. 時刻 t の時の球の位置 (x, y, z) を求めよ。

2. 図に示すように，z 軸に沿って大きさが I の電流が流れている。x 軸上で $x = r$ $(r > 0)$ の位置にある点を P とする。z 軸上の任意の点 Q の z 座標を z とし，角度 θ を $z = r\tan\theta$ と定義する。真空の透磁率を μ_0 とする。以下の問いに答えよ。



図

(a) 点 Q にある微小区間 dz に流れる電流が点 P に作る磁束密度ベクトル d$\vec{B}$ の向きを示し，その大きさを r と θ を使って表せ。

(b) z 軸上で $\theta = \theta_1$ の点 R から $\theta = \theta_2$ の点 S までの区間に流れる電流が点 P に作る磁束密度の大きさを求めよ。

(c) z 軸上を流れる無限長の直線電流が点 P に作る磁束密度の大きさを求めよ。

(d) 上の (b) の結果を用いて，半径 r の円に外接する正 n 角形に電流が流れているとき，円の中心での磁束密度の大きさを求めよ。

(e) 上の (d) の結果で n が無限大の極限，すなわち半径 r の環電流の中心での磁束密度の大きさを求めよ。

3. 時間に依存しないハミルトン演算子 $\hat{H}_0$ の n 番目のエネルギー固有値 $E_n^{(0)}$ に対する固有関数を $\psi_n^{(0)}(\vec{r},t) = u_n^{(0)}(\vec{r}) e^{-iE_n^{(0)}t/\hbar}$ とする。ここで、$u_n^{(0)}(\vec{r})$ は直交条件および規格化条件を満たし、同一のエネルギーに対して縮退した状態は無いものとする。この系に時間に依存する摂動項 $\hat{H}_1(t)$ を加えて、全ハミルトン演算子 $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(t)$ を考える。いま、シュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r},t) = \hat{H}(t)\psi(\vec{r},t)$$

を満たす規格化された波動関数 $\psi(\vec{r},t)$ を $\psi_n^{(0)}(\vec{r},t)$ を用いて $\psi(\vec{r},t) = \sum_n C_n(t)\psi_n^{(0)}(\vec{r},t)$ と展開する。以下の問に答えよ。

(a) $\psi(\vec{r},t)$ が規格化されているとき、係数 $C_n(t)$ の満たすべき条件を求めよ。

(b) $\hat{H}_1(t)$ は $\hat{H}_0$ に比べて小さいとして、$C_n(t)$ を $\hat{H}_1(t)$ の摂動次数により $C_n(t) = C_n^{(0)}(t) + C_n^{(1)}(t) + C_n^{(2)}(t) + \cdots$ と摂動展開する。ここで、$C_n^{(0)}(t)$ は 0 次摂動における係数である。いま、$C_n^{(i)}(t) (i \geq 1)$ の時間微分を

$$\frac{dC_n^{(i)}(t)}{dt} = \sum_k A_{nk}(t) C_k^{(i-1)}(t)$$

と書くとき、$A_{nk}(t)$ を求めよ。

(c) $\hat{H}_1(t)$ が時間に依存しない演算子 $\hat{F}$ と角振動数 ω を用いて

$$\begin{aligned} \hat{H}_1(t) &= 0 & (t \leq 0) \\ \hat{H}_1(t) &= \hat{F}e^{-i\omega t} + \hat{F}^\dagger e^{i\omega t} & (t > 0) \end{aligned}$$

であるとき、$t \leq 0$ におけるエネルギー $E_m^{(0)}$ の固有状態が、$t \to \infty$ においてエネルギー $E_k^{(0)} = E_m^{(0)} + \hbar\omega$ の状態となる単位時間あたりの遷移確率

$$W = \lim_{t\to\infty} \frac{|C_k^{(1)}(t)|^2}{t}$$

を求めよ。必要ならば、デルタ関数の表現

$$\pi\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon(1-\cos(x/\epsilon))}{x^2}$$

を用いてもよい。

4. 一辺の長さが L の立方体の内部に，質量 m の自由に運動するスピン 1/2 のフェルミ粒子 N 個が閉じ込められている。ここで，N は十分に大きいとする。以下の問いに答えよ。

(a) A を振幅，n_x, n_y, n_z を正の整数値として，粒子の波動関数の空間分布が

$$\psi(x, y, z) = A \sin(n_x \pi x/L) \sin(n_y \pi y/L) \sin(n_z \pi z/L)$$

であるとする。このとき，粒子の取り得るエネルギー固有値を n_x, n_y, n_z を用いて表せ。

(b) フェルミエネルギー ϵ_F を N を用いて

$$\epsilon_F = CN^a$$

と書くとき，C と a を求めよ

(c) 絶対零度における系の全エネルギー U_0 を N と ϵ_F を用いて表せ。

5. 振動子モデルを使って原子による光の共鳴散乱を考える。散乱後の光の強度 $I(\omega)$ は原子内部の振動子の振幅 $A(t)$ を使って $I(\omega) = C|A(t)|^2$ と表されるとする。ここで C は定数である。以下の問いに答えよ。

(a) 振動子は角振動数 ω_0，減衰の緩和時間（励起状態の平均寿命）τ の減衰調和振動子で表され，原子に入射する光は原子に対して $F\exp(-i\omega t)$（F は定数）という周期的な外力を与えるとする。このとき，振動子の振幅 $A(t)$ は

$$\frac{dA(t)}{dt} + \left(i\omega_0 + \frac{1}{2\tau}\right)A(t) = F\exp(-i\omega t)$$

という微分方程式を満たす。この方程式の定常解が $A(t) = A\exp(\lambda t)$ という形をしているとして，定数 A および λ を定めよ。

(b) 散乱光の強度 $I(\omega)$ を角振動数 ω の関数として表し，横軸を角振動数 ω，縦軸を散乱光強度 $I(\omega)$ にとり，両者の関係をグラフに示せ。

(c) $I(\omega)$ の半値全幅（極大値の半分の値をとる角振動数の幅）を求めよ。その結果を用いて，散乱光のエネルギー幅と励起状態の平均寿命の不確定性関係を導け。

6. 以下の問いに答えよ。

(a) ある放射線源から放出される信号を 1 分間計数したところ 639 個あった。放射線源を取り除いてバックグラウンドを 1 分間計数すると 202 個だった。放射線源から 1 分間に放射される正味の放射線の数と，その誤差を求めよ。

(b) ある物理量を測定する実験を 6 回行ったところ，以下の結果が得られた。

9.95，9.78，9.83，9.62，9.73，9.89

標本の平均値 $\bar{x} = 9.80$ である。

i. 標本の標準偏差 s，分布の標準偏差 σ，標準誤差 σ_m を求めよ。

ii. 一度の測定で測定値が $7.40 \sim 9.80$ の範囲になる確率を求めよ。

(c) A, B, C, D は独立な測定量であり，それぞれ $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \Delta D$ の誤差を持つ。誤差は統計誤差のみであるとして，Z の誤差 ΔZ を求めよ。

i. $Z = 2A - B$

ii. $Z = \dfrac{CD^3}{A^2 B}$