2014年2月21日実施

２０１４年度（春季）
理学研究科物理学専攻博士課程前期課程　入学試験問題（物理）

［注意］

・ 配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ。

・ 大問は６題。

　・理論物理学研究室を第１志望とする場合は大問１－４の４題を解答せよ。

　・原子核放射線物理学研究室，または宇宙地球系物理学研究室を第１志望とする場合は，大問１-６のうち，４題を選択して解答せよ。

・ 大問１問に付き解答用紙１枚を用い，解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。

・ 解答用紙が４枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。

・ 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。

1.

一様密度で質量 M,半径 a,長さ l の円柱A(図1)と,同じく一様密度で同じ質量 M,外半径 a,内半径 b,長さ l の円筒B(図2)がある$(0 < b < a)$。これらの物体を水平面と角度 ϕ をなす斜面に置き(図3),時刻 t =0で手を離した。これらの物体は滑ることなく転がるとする。以下の問に答えよ。

(a) 円柱Aの中心軸まわりの慣性モーメントを求めよ。
(b) 円筒Bの中心軸まわりの慣性モーメントを求めよ。
(c) これらの物体の並進運動の運動方程式を書け。なお物体と斜面の間に働く摩擦力を F とする。坂道に沿って下る方向を正として座標軸を取り,それを x 軸とする。
(d) 慣性モーメントを I として, これらの物体の回転運動の方程式を書け。物体の回転角を θ とする。
(e) (c),(d)で得られた結果から F を消去することで物体の並進運動の運動方程式を求めよ。それを解き物体の位置と速さを時刻 t の関数として求めよ。
(f) 運動エネルギー(並進と回転の両方を含む) K と位置エネルギー U を x と $\dot{x}$ の関数として求めよ。時刻t =0の位置を高さの基準とする。
(g) ラグランジュ関数 L を x と $\dot{x}$ の関数として表し,ラグランジュの運動方程式を書け。
(h) 物体AとBの運動のちがいを記述せよ。

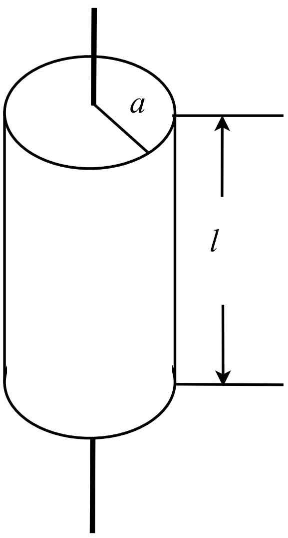


図 1

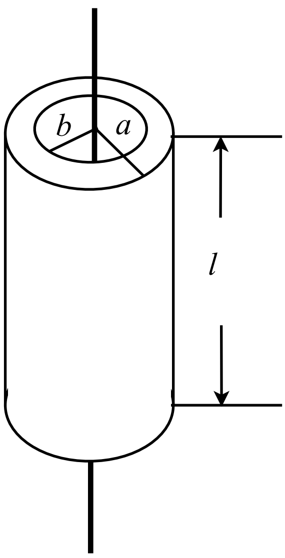


図2

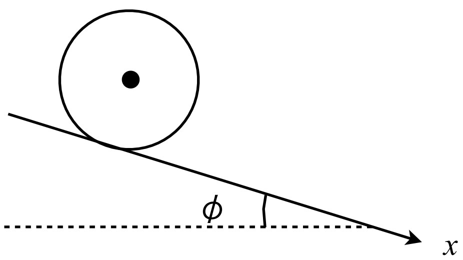


図3

2.

真空中に図のように電極を配置し，AB 間の電圧 V (V>0) によって加速した質量 m， 電荷 q (q>0) の粒子を長さ L の平行な電極対 CD 間に x 軸に沿って入射させる。なお，電極 CD 間の距離は d で原点 O は両電極から等距離にある。また， 電極 B, C, D の電位をそれぞれ 0, $-V'/2$, $+V'/2$ とする (V'>0)。電極間の外側への電場の染み出しは無視できるものとする。以下の問に答えよ。

(a) 加速前の速さを 0 として， 加速されて電極 B を通過したときの荷電粒子の速さ v_0 を q，V，m で表せ。

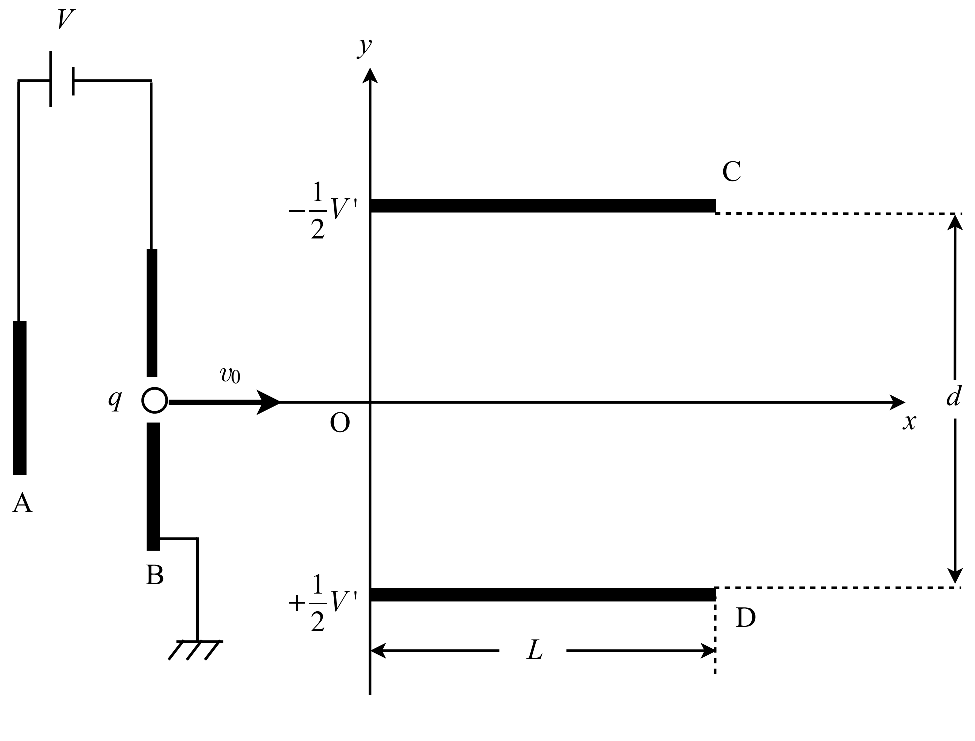
(b) 電極 CD 間での荷電粒子の加速度の大きさと向きを求めよ。

(c) 電極 C または D に衝突せずに電極間を通過する場合に入射してから通過するまでにかかる時間 t を v_0 を用いて表せ。

(d) 電極 C または D に衝突せずに電極間を通過する場合， 通過するのに必要な V' の条件を V を用いて表せ。

(e) 電極 C または D に衝突せずに電極間を通過する場合， 入射から通過後の粒子の y 座標を x の関数として表せ。なお，v_0 を用いてよい。

(f) 電極 CD 間に紙面に垂直に磁束密度 B の磁場をかけた。荷電粒子が x 軸に沿って等速直線運動をするための B の大きさと向きを求めよ。



図

3.

スピン 1/2 の粒子が 3 次元空間で x 軸上を運動する系を考える。粒子の座標を x, 運動量を p として, ハミルトニアンが

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_3$$

で与えられるとする。すなわち, 一次元調和振動子のポテンシャルとスピンの第 3 成分に依存する作用がある。ただし簡単のため粒子の質量は 1 とした。いま, 二つの演算子

$$Q_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 p + \sigma_2 \omega x), \quad Q_2 = \frac{1}{2}(\sigma_2 p - \sigma_1 \omega x)$$

を導入する。ただし

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

は Pauli 行列である。エネルギー固有値問題 $H\Psi = E\Psi$ を考える。以下の問に答えよ。

(a) (i) Pauli 行列の交換関係 $[\sigma_i, \sigma_j] \equiv \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i$ と反交換関係 $\{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i$ を計算せよ。

(ii) 正準交換関係 $[x, p] = i\hbar$ 及び Pauli 行列の交換関係・反交換関係を用いて, $[Q_i, H]$ および $\{Q_i, Q_j\}$（$i = 1, 2$）を求めよ。

(b) (i) 波動関数が二成分

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$$

であることに注意して, 各成分 $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ に対する方程式を導け。

(ii) 一次元の調和振動子はエネルギー固有値が

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

と離散化される。それに対応する固有関数を $\phi_n(x)$ とする。H のエネルギー固有値を求め, 対応する固有関数 Ψ を ϕ_n を用いて表せ。

(c) (i) H の基底状態の波動関数を Ψ_0 とした時,

$$Q_i\Psi_0 = 0 \quad (i = 1, 2)$$

を証明し, またこの式から Ψ_0 の具体的な関数形を求めよ。

(ii) H の k 番目のエネルギー励起状態でありかつ σ_3 の固有状態でもある状態の波動関数 Ψ を ϕ_n を用いて表せ。

4.

一辺の長さ L の立方体 C を考える。この立方体に閉じ込められた粒子の波動関数は立方体の各面で 0 になるという境界条件を満たすとする。以下の問に答えよ。

(a) 質量 m の自由粒子一個が立方体 C に閉じ込められているとする。この粒子のエネルギー固有値は正の整数の組 (n_x, n_y, n_z) を用いて

$$E = E_0[(n_x)^2 + (n_y)^2 + (n_z)^2], \quad E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

と離散化されることを示せ。

(b) 半径 R の n 次元球の体積 $V_n(R)$ を以下の手順で求めよ。

(i) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-x^2}$ とおく。$I = \sqrt{\pi}$ であることを

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \ e^{-(x^2+y^2)}$$

の積分を極座標を用いて実行することによって示せ。

(ii) I^n の積分を n 次元空間において球座標を用いて実行することによって, $V_n(R)$ をガンマ関数 $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ を用いて表せ。

(c) 質量 m の自由粒子 N 個が立方体 C に閉じ込められているとする。ただし N は十分大きいとする。

(i) 系のエネルギーが $E(\gg E_0)$ より小さい状態の数 $\Omega(E)$ は

$$\Omega(E) \simeq \frac{1}{N!}\frac{1}{2^{3N}} V_{3N}\left(\sqrt{\frac{E}{E_0}}\right)$$

となることを示せ。ただし N 個の粒子は互いに区別しない。

(ii) 系のエネルギーが E から $E+\Delta E$ の間にある状態の数 $W(E)$ は $W(E) = (d\Omega/dE)\Delta E$ と評価できる。これを用いて, 系のエントロピー S を求め, これが示量変数となることを示せ。ただし, Boltzmann 定数を k_B とし, $\ln(E/\Delta E) = O(\ln N)$ とし, 簡単のため N は偶数であるとする。整数 M が十分大きい時, $\ln M! \simeq M(\ln M - 1)$ と近似して良い。

(iii) 得られたエントロピーの表式を用いて, 温度 T をエネルギー E と粒子数 N を用いて表し, さらに状態方程式を導出せよ。

5.

以下の問に答えよ。

(a)ある放射線源の計数率を測定したい。放射線源からの信号とバックグランドの信号を合わせたグロス信号は1分間に200個,バックグランドは1分間に100個であった。

i) 放射線源からの1分間の計数率とその誤差を求めよ。

ii) 計数率を5%以下の精度で測定したい。グロス信号とバックグラウンド信号の計測時間を同じとしたとき それぞれ最低何分間測定しなければならないか。

iii) グロス信号を10分間,バックグラウンド信号を5分間測定した場合の誤差は何%になるか。

(b)直径約2mm,長さ約30cm の円柱棒がある。この円柱棒の体積を1%の精度で求めたい。一般のノギス(最小目盛り 1/20mm)と定規(最小目盛り 1mm)を用いてこの測定が可能かどうか,議論せよ。もし不可能ならどうすれば良いかも述べよ。

6.

以下の真空計のリスト A から 1 つ選びその動作原理を説明せよ。また， 選んだ真空計のおおよその動作範囲をリスト B から選びその値がどのように決まるかを説明せよ。

リスト A：　熱陰極電離真空計，水銀 U 字管マノメータ，ピラニ真空計
リスト B：　10^{5}~10^{1} Pa,　10^{4}~10^{-1} Pa,　10^{-2}~10^{-7} Pa