2015年2月実施

2015年度　（春季）
立教大学大学院理学研究科物理学専攻博士課程前期課程
入学試験問題（物理学）

[注意]

・配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ。

・大問は6問。

　・理論物理学研究室を第１志望とする場合は大問１～４の４問を解答せよ。

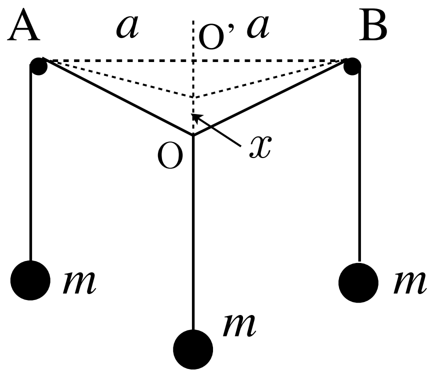
　・原子核放射線物理学研究室、または宇宙地球系物理学研究室を第１志望とする場合は、大問１～６のうち、４問を選択して答えよ。

・大問1問に付き解答用紙1枚を用い、解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。

・解答用紙が4枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。

・質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。

1．鉛直な壁に、同じ高さに$2a$ 離して太さの無視できる２本の支柱A、Bを壁に垂直に立てる。この支柱に質量、太さ、 伸びの無視できる糸で同じ質量mの３つのおもりを図のようにつなげたものを掛け、中央のおもりは２本の支柱の鉛直２等分線上にくるようにする。３つのおもりは壁と平行な同じ平面内にあり、鉛直方向にのみ運動するとする。糸と支柱の摩擦は無視でき、糸は滑らかに動く。重力加速度をgとして次の問に答えよ。



(a) ３つのおもりがつり合って静止しているとき、中央のおもりを下げている糸と、両端のおもりを結ぶ糸の交点をO、支柱A、Bの中点をO’とする。OO’の長さlを求めよ。

以下の問では解答に lを用いてよい。

(b) この交点がOからx 変位した（つまり中央のおもりがx 変位した）とき、両端のおもりの位置変化 y を x の関数として求めよ。鉛直上方を正とする。

(c) この系のポテンシャルエネルギー U を x の関数として求めよ。つり合いのときのポテンシャルエネルギーを０とする。

(d) x が l に比べて充分に小さいとき、x の１次の項までの近似で、位置変化 y をx の関数として表せ。

(e) x が lに比べて充分に小さいとき、 x の２次の項までの近似を行うと、この系のポテンシャルエネルギー U は

$$U(x) = mg\frac{3x^2}{8l}$$

となることを示せ。

(f) x が l に比べて充分に小さいとき、この系のラグランジュ関数を x の関数として求めよ。（e）のポテンシャルを用いてよい。

(g) この系にラグランジュの運動方程式を適用し、微小振動の周期を求めよ。

2. 点電荷 q （ $q>0$ ）について以下の問に答えよ

(a) 真空中（誘電率 ε_0）におかれているとき距離 r 離れた位置での電位を求めよ。なお、$r=\infty$ での電位を 0 とする。

(b) (a)で求めた電位から電場の大きさと向きを求めよ。

これ以降の問では無限に広い接地された導体平面が存在している場合を考える。その導体平面を yz 平面とし、それに垂直な方向を x 軸とする。なお、$x>0$ の空間は真空である。

(c)真空中の点（$a, 0, 0$）（$a>0$）に点電荷が置かれているとき、$x>0$ の空間の各点での電位と電場を求めよ。

(d) (c)の電荷 q に働く力を求めよ。

(e) (c)の導体表面に生じた電荷密度を求めよ。

(f) (c)の導体表面上に現れる電荷の総和は $-q$ になることを示せ。

3. 角運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{J}}$ は交換関係

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \hat{J}_k$$

を満たす。ただし、添字の i, j, k は 1,2,3 をとり、それぞれ x, y, z に対応させる。

$$\hat{\boldsymbol{J}}^2 := \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2, \quad \hat{J}_\pm := \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$$

とおく。$\hat{\boldsymbol{J}}^2$ と $\hat{J}_z$ の同時固有関数を $\psi_{\lambda m}$ とし、その固有値をそれぞれ $\hbar^2\lambda$, $\hbar m$ とすると、$\psi_{\lambda m}$ は固有値方程式

$$\hat{\boldsymbol{J}}^2 \psi_{\lambda m} = \hbar^2 \lambda \psi_{\lambda m}, \quad \hat{J}_z \psi_{\lambda m} = \hbar m \psi_{\lambda m}$$

を満たす。以下の問に答えよ。

(a) (i) 交換関係 $[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm]$, $[\hat{J}_+, \hat{J}_-]$, $[\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{J}_\pm]$, $[\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{J}_z]$ を計算せよ。さらに $\hat{\boldsymbol{J}}^2 - \hat{J}_z^2$ を $\hat{J}_\pm$ を用いて表せ。

(ii) 与えられた λ に対して、m には最大値 $m_{\max}$ と最小値 $m_{\min}$ が存在し、

$$\hat{J}_+ \psi_{\lambda m_{\max}} = 0, \quad \hat{J}_- \psi_{\lambda m_{\min}} = 0$$

が成り立つことを示せ。

(iii) $m_{\max} = l$ とおく。λ と m が次のように離散化されることを示せ。

$$\lambda = l(l+1), \quad l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots, \quad m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$$

(b) 以下では、$\hat{\boldsymbol{J}}$ として軌道角運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ をとる。$\hat{J}_z$ と $\hat{J}_\pm$ は球座標 (r, θ, φ) を用いて

$$\hat{J}_z = i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \hat{J}_\pm = \hbar e^{\pm i\varphi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot\theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

と書ける。

(i) 波動関数が空間座標の一価関数であることから、λ と m が次のように離散化されることを示せ。

$$\lambda = l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$$

(ii) $\psi_{\lambda l}(\theta, \varphi)$ が満たす微分方程式を立て、それを解いて $\psi_{\lambda l}(\theta, \varphi)$ を決定せよ。ただし規格化定数は問わない。

(iii) $\psi_{\lambda l}(\theta, \varphi)$ から $\psi_{\lambda m}(\theta, \varphi)$ が帰納的に求められることを利用して、$\psi_{\lambda m}(\theta, \varphi)$ の表式を導け。ただし、次の式で定義される Legendre 陪関数を用いてよい。

$$P_\nu^\mu(x) = \frac{(-1)^\mu}{2^\nu \nu!} (1-x^2)^{\mu/2} \frac{d^{\nu+\mu}}{dx^{\nu+\mu}} (x^2-1)^\nu.$$

また規格化定数は問わないものとする。

4. 一辺の長さ L の立方体に閉じ込められた粒子の波動関数は立方体の各面で 0 になるという境界条件を満たすとする。質量 m の自由な Fermi 粒子がこの立方体に閉じ込められているとする。以下の問に答えよ。

(a) 空間が 3 次元であるとし粒子が非相対論的であるとする。

(i) 粒子のエネルギー固有値は正の整数の組 (n_x, n_y, n_z) を用いて

$$\epsilon = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}[(n_x)^2 + (n_y)^2 + (n_z)^2]$$

と離散化されることを示せ。

(ii) エネルギーが ϵ 以下の一粒子状態数 $\Omega(\epsilon)$ を求めよ。さらに、エネルギーが ϵ と $\epsilon + d\epsilon$ の間にある一粒子状態数を $D(\epsilon)d\epsilon$ としたとき、$D(\epsilon)$ を求めよ。ただし $\epsilon \gg \pi^2\hbar^2/(2mL^2)$ とする。

(iii) 縮重度 g の理想 Fermi 気体の Fermi エネルギー ϵ_F を粒子数密度 n を用いて表せ。さらに、絶対零度でのエネルギー密度 u と圧力 p を粒子数密度 n と Fermi エネルギー ϵ_F を用いて表せ。

(b) (a) の結果を踏まえて、次の二つの場合について、絶対零度で縮重度 g の理想 Fermi 気体のエネルギー密度 u と圧力 p を粒子数密度 n と Fermi エネルギー ϵ_F を用いて表せ。

(i) 空間の次元数が d で粒子が非相対論的である場合。

(ii) 空間の次元数が d で粒子が相対論的である場合。

(c) 再び 3 次元空間を考える。ナトリウムは原子量 23 の元素であり、室温で密度 1.0 g/cm^3 の一価金属となる。ナトリウム金属中の自由電子の集団を縮重度 2 の理想 Fermi 気体とみなしたとき、室温で Fermi 縮退が起こっていると考えてよいだろうか。またこれらの自由電子は相対論的か非相対論的か。Fermi 温度を評価して答えよ。ただし、以下の物理定数を使用して良い。換算 Planck 定数 $\hbar = h/(2\pi) = 1.1 \times 10^{-34}\mathrm{J \cdot s}$, Boltzmann 定数 $k_B = 1.4 \times 10^{-23}\mathrm{J/K}$, 電子質量 $m_e = 9.1 \times 10^{-31}\mathrm{kg}$, Avogadro 定数 $N_A = 6.0 \times 10^{23}$, 光速 $c = 3.0 \times 10^8\mathrm{m/s}$.

5. 放射性元素が単位時間にn個崩壊する確率はポアソン分布

$$f(n) = e^{-a}\frac{a^n}{n!}$$

で与えられる。次の問に答えよ。ただし自然対数の底$e = 2.7183\cdots$とする。

（a） n =0 から∞の全ての場合を足し合わせる（ $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ ）と確率が１になることを示せ。

（b） 崩壊数の平均値は a となることを示せ。

（c） 崩壊数の標準偏差$\left\langle (n-a)^2 \right\rangle^{\frac{1}{2}}$ は$\sqrt{a}$ となることを示せ。

（d） １秒間の平均崩壊数が　1.0　個であったとする。１秒間に１つも崩壊しない確率を有効数字２桁で求めよ。

（e） （d）と同じ条件で１秒間に２個以上崩壊する確率を有効数字２桁で求めよ。

６． 地上で観測される宇宙線起源のミューオンについて以下の問に答えよ。なお、有効数字は２桁まで求めること。

(a)ミューオンが 20km の上空で生成されてほぼ光速で真下の地上に達した場合、どれだけの時間がかかるか。ミューオンの速さとして $3.0\mathrm{x}10^8$m/s を用いてよい。

(b) 相対論的効果による寿命の変化がないと仮定した場合、上空 20km で生成されたもののうち崩壊せずに真下の地上に到達できるミューオンの割合を e^{-x} とする。x を求めよ。なお、ミューオンが静止しているときの寿命を 2.2μs とする。

(c) 相対論的効果を考慮した時、上空 20km で生成されたもののうち崩壊せずに真下の地上に到達できるミューオンの割合を e^{-y} とする。y を求めよ。ただし、ミューオンの質量を $100\mathrm{MeV}/c^2$、エネルギーを 1.0GeV と仮定する。

(d) ミューオンを地上で計数するにはどのような検出器を使うのがよいか。

(e) (d)の検出器の検出原理を説明せよ。