

2015年度（夏季）
立教大学大学院理学研究科物理学専攻博士課程前期課程
入学試験問題（物理学）

[注意]

- ・配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ。
- ・大問は6問。
 - ・理論物理学研究室を第1志望とする場合は大問1～4の4問を解答せよ。
 - ・原子核放射線物理学研究室、または宇宙地球系物理学研究室を第1志望とする場合は、大問1～6のうち、4問を選択して答えよ。
- ・大問1問につき解答用紙1枚を用い、解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。
- ・解答用紙が4枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。
- ・質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。

1. 以下の問いに答えよ。ただし、重力加速度は g とする。

(a) 底面の半径 a 、高さ h 、質量 M の円柱 C がある。図 1 のように側面上に直線 AB をとる。円柱 C の直線 AB 回りの慣性モーメントを求めなさい。

(b) 直線 AB 上に質量と太さが無視できる固い針金を取り付け、両側を支えて円柱 C をつるし、 $t=0$ の時に図 2 のように円柱を θ_0 傾けて静かに手を離した。鉛直方向からの円柱の傾き θ を t の関数として表しなさい。ただし $\theta_0 \ll 1$ とし、支点での摩擦は無視できるものとする。

(c) 次に、円柱 C をつるした時の側面最下部に、質量の無視できる長さ l のひもを取り付け、もう一方の先端に質量 m の小球 S を取り付けた。図 3 のように鉛直方向からの円柱 C の傾きを θ_1 、ひもの傾きを θ_2 とする。ここで、 $\theta_1 \ll 1$ かつ $\theta_2 \ll 1$ であり、小球 S の速さは $2a\dot{\theta}_1 + l\dot{\theta}_2$ と近似できるものとする。この系のラグランジアン $L=K-U$ を求めなさい (K : 全運動エネルギー、 U : ポテンシャル)。また、ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

から、 $\theta_1, \theta_2, M, m, a, l, g$ を用いて、 $\ddot{\theta}_1$ と $\ddot{\theta}_2$ をそれぞれ表しなさい。

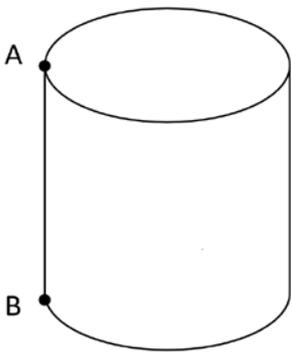


図 1

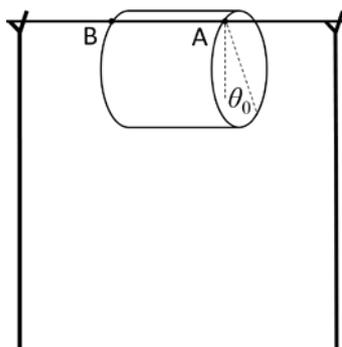


図 2

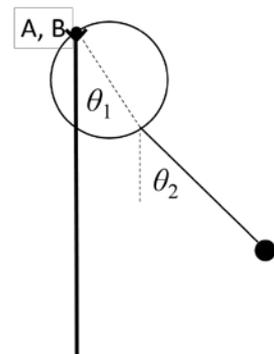


図 3

2. 内半径 a 、外半径 b の球形コンデンサーがある。このコンデンサーの内球を接地し、外球に $+V$ の電位を与えた (図1)。真空の誘電率を ϵ_0 として次の間に答えよ。

(a) 内球に帯電している電荷 Q はいくらか。正負の符号も含めて求めよ。

(b) 中心からの距離 r ($a \leq r \leq b$) の位置の電場ベクトル \mathbf{E} の向きと大きさを求めよ。

このコンデンサーを利用して荷電粒子のエネルギー分析が可能である。図2のように、このコンデンサーを中心を含む面で切断して真空中におき、入口および出口の $r=(a+b)/2$ の位置にスリットをもうけることでエネルギー分析器として利用する。スリットの幅は非常に狭く、出入り口付近での電場の乱れは無視できるものとする。また相対論的効果も無視できるものとして次の間に答えよ。

(c) 電荷 q 、運動エネルギー K の陽イオンがこの分析器に垂直に入射し、出口から出てくるために必要な V を求めよ。

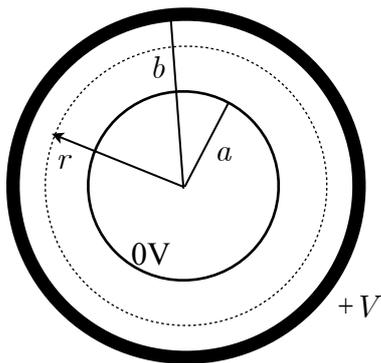


図1.

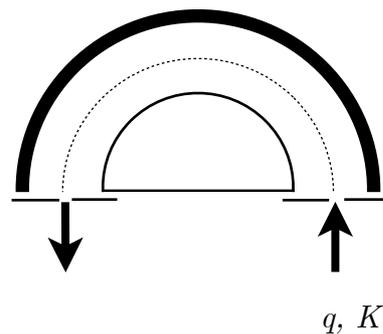


図2.

3. z 軸方向に沿って入射する運動量 p 、振幅 $A = 1/\sqrt{4\pi}$ の平面波 $u_p(z)$ が動径方向の座標 r にもみ依存するポテンシャル

$$V(r) = 0 \quad (r > a)$$

$$V(r) = \infty \quad (r \leq a)$$

によって弾性散乱される現象を考える。以下では、位置ベクトルの極座標表示を $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$ で表す。以下の間に答えよ。

- (a) 入射波 $u_p(z)$ を、軌道量子数 (方位量子数) l 、磁気量子数 m の正規直交条件を満たす球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ を用いて、

$$u_p(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l u_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

と展開する。ここで、 $Y_{00}(\theta, \phi)$ の規格化定数は $1/\sqrt{4\pi}$ である。更に、入射波 $u_p(z)$ の S 波成分 (原点に対して角運動量 $l = 0$ である波動関数の成分) $u_{00}(r)$ を、外側から原点に向かう波動関数の S 波成分を $u_S^{(-)}(r)$ 、原点から外向きに向かう波動関数の S 波成分を $u_S^{(+)}(r)$ として、

$$u_{00}(r) = u_S^{(+)}(r) + u_S^{(-)}(r)$$

と表すとする。 $u_S^{(+)}(r)$ と $u_S^{(-)}(r)$ を求めよ。

- (b) いま、 r が十分大きいところでの散乱波も含めた波動関数の S 波成分を、問 (a) で求めた $u_S^{(\pm)}(r)$ を用いて

$$u_S(r) = C u_S^{(+)}(r) + u_S^{(-)}(r)$$

と表す。ここで、 C は1つの実パラメータ δ により

$$C = e^{2i\delta}$$

であるとする。 $u_S(r)$ を用いて、この散乱の全断面積を求めよ。

- (c) δ と p の関係を求め、この散乱の全断面積の p 依存性を求めよ。また、 $pa \ll h$ における全断面積の漸近形を示せ。ここで、 h はプランク定数である。

4. 一辺が L で体積が $V = L^3$ の立方体の箱の中にある N 個の自由粒子の定常状態を考える。ここで、粒子はスピンを持たない同種粒子で、互いに区別できないものとする。以下の問に答えよ。
- (a) この粒子の質量を m として、1 個の粒子に対するエネルギー固有値 E_p と運動量固有値 \mathbf{p} 、およびこれらの固有値に対する規格化された固有関数 $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ を求めよ。なお、粒子の運動は非相対論的であるとし、波動関数は箱の内壁で周期的境界条件を満たすとする。
- (b) 絶対温度 T における N 粒子系の分配関数を求めよ。ここで、ボルツマン定数を k_B として、 V は十分大きく、固有値は連続的に分布しているとして計算せよ。
- (c) 絶対温度 T におけるこの系のエネルギー平均値を求めよ。

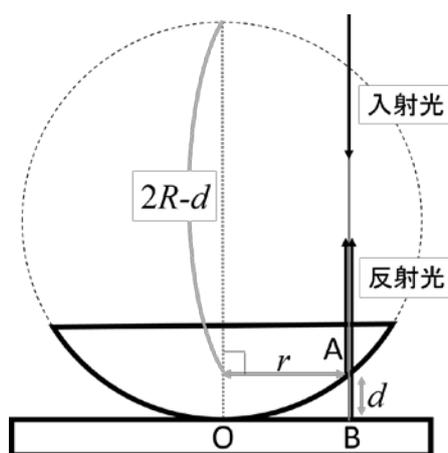
5. 曲率半径 R の平凸レンズがある。図のように、この平凸レンズを平面ガラスの上に置き、波長 λ の単色光を入射する。平凸レンズの下面で反射した光と平面ガラスで反射した光が干渉し、同心円状の干渉縞を生じる現象について考える。

平凸レンズと平面ガラスの接点を O 、平凸レンズ下面上での光の入射点を A 、平面ガラス上での光の入射点を B とし、 OB 間の距離を r 、 AB 間の距離を d とする。ここで、 d は R や r に対して十分小さく、入射光線と反射光線は平行とみなせるものとする(図では d を強調して描いている)。また、内側から数えて m 番目の明環の半径を r_m とする。以下の問いに答えよ。

(a) R を d, r で表しなさい。

(b) 光学的に疎な媒質(空気)から密な媒質(ガラス)に向かって光が反射する際には位相が反転する。干渉によって光が強め合う条件式を d, m, λ を使って表しなさい。また、 R を m, r_m, λ で表しなさい。

(c) 曲率半径 R が 1800mm から 2000mm の間の値と分かっている平凸レンズがあり、このレンズの R を 20mm の精度で計測することを考える。ここで使用する光源の波長 $\lambda = 500\text{nm}$ は高い精度で測定されており、誤差は無視できるものとする。明環の半径の測定精度が 0.01mm であるとき、内側から数えて何番目の明環の半径を計測すれば R の測定精度 20mm を達成できるか。内側から数えて m 番目の明環の半径を計測するとして、要求精度を達成できる m の最小値を答えなさい。



図

6. 次の設問 I, II, III に答えよ

I. 放射線計測に関する以下の問に答えよ。計測時間の誤差は無視できるとする。

(a) バックグラウンドを1分間計測したとき100カウントの計数値があった。ある放射線源を持ってきたところ、計数値は1分間で300カウントを記録した(グロス計測)。この線源から出てくる1分間の信号を誤差付で求めよ。

(b) 問(a)と同じ条件で計測を行うが、バックグラウンド計測とグロス計測をあわせた全計測時間は10分間と限られている場合、誤差を最も小さくするにはグロス計測を何分にしたら良いか。有効数字2桁で求めよ。

II. 水素原子のエネルギー準位は、 n を主量子数として以下で与えられる。次の問に答えよ。

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \quad [\text{eV}]$$

(a) 基底状態の水素原子を第一励起状態に励起するのに必要な最小のエネルギーはいくらか。

(b) 基底状態の He^+ イオンの電離エネルギーはいくらか。

III. 150eVの電子のド・ブロイ波長を有効数字1桁で求めよ。

(素電荷 $e=1.6 \times 10^{-19}$ C、電子質量 $m_e=9.1 \times 10^{-31}$ kg、プランク定数 $h=6.6 \times 10^{-34}$ Jsとする。)