2016 年 2 月実施

2016 年度　（春季）
立教大学大学院理学研究科物理学専攻博士課程前期課程
入学試験問題（物理学）

[注意]

・配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ。

・大問は6問。

　・理論物理学研究室を第１志望とする場合は大問１～４の４問を解答せよ。

　・原子核放射線物理学研究室、または宇宙地球系物理学研究室を第１志望とする場合は、大問１～6 のうち、４問を選択して答えよ。

・大問1問に付き解答用紙1枚を用い、解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。

・解答用紙が4枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。

・質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。

1．半径 b の円筒軸の両端に半径 a ($a>b$) の円盤を、中心軸を一致させて取り付けた糸まきが、粗い水平面上に置かれている(図1)。この糸まきの質量は M、慣性モーメントは I である。糸まきに巻いた糸を張力 T で、中心軸に垂直方向に、水平面となす角 θ で引く(図2．)。ただし張力 T が働く作用点は両端の円盤から等距離の面内にあるとする。また T は糸まきが面上を滑ることがない程度の大きさである。次の問いに答えよ。

(a)ある角度 θ_0 で引いた時、糸まきは動かなかった。この角度 θ_0 を求めよ。

(b)ある角度 θ で引いた時、糸まきの重心の加速度を a、b、M、I、θ、T を用いて表せ。ただし糸まきが動いても θ、T を一定に保つように引き、糸まきが床から離れることはないとする。

(c)角度 θ と糸まきの運動の向きの関係について述べよ。

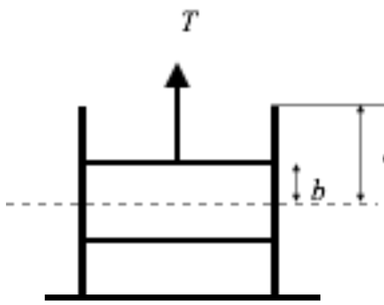

図1．

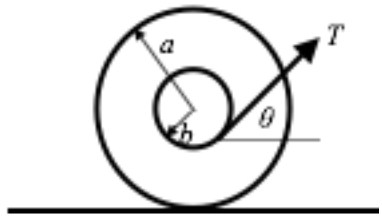

図2．

2．以下の電荷分布に関する問に答えよ。ただし、無限遠を電位の基準とする。

(a)　半径 a の球の表面に一様に電荷が分布しておりその全電荷を Q とする。球の内外の電位分布をガウスの法則を利用して求め、中心からの距離 r の関数として図に示せ。

(b)　(a)の問で球の中心から距離 r の点における電位を球表面の微小電荷からの寄与をすべて積分することによって示せ。なお、球の内外の点について場合分けすること。

(c)　半径 a の球の内部に一様に電荷が分布しており全電荷を Q とする。球の内外の電位分布を求め中心からの距離 r の関数として図に示せ。

(d)　(c)の電荷分布が持つ静電エネルギーを、電荷がない状態からその分布を作り上げるのに必要な仕事を計算することにより求めよ。

３．以下の各問に答えよ。

(a) 質量 m の自由粒子に対するシュレーディンガー方程式から連続方程式

$$\frac{\partial \rho(t,\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(t,\vec{r}) = 0$$

を導き、粒子の確率密度 $\rho(t,\vec{r})$ と流れの密度 $\vec{J}(t,\vec{r})$ を波動関数 $\Psi(t,\vec{r})$ を用いて表せ。ここで、直交座標における x、y、z 軸方向の単位ベクトル $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ を用いて、微分演算子 $\vec{\nabla}$ は、

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

と定義する。

(b) 以下の問では、十分大きな体積 V の領域内で質量 m の不安定粒子が時刻 $t=0$ で N_0 個生成され、これらが自然崩壊する現象を考える。不安定粒子の波動関数は、エネルギー E ,運動量 $\vec{p}$ の自由粒子の固有関数 $\Psi(t,\vec{r})$ において、そのエネルギーを $E = E_0 - i\Gamma/2$ と複素数に拡張することにより表すことができる。ここで、E_0 と Γ は実数値であり、$E_0 > 0$、$\Gamma > 0$ とする。この不安定粒子の波動関数を用いて問(a)の $\rho(t,\vec{r})$ と $\vec{J}(t,\vec{r})$ を求めよ。

(c) 時刻 $t=T$ において崩壊しないで残っている粒子数の期待値 $N(T)$ を求めよ。

(d) 不安定粒子の波動関数を $\Psi(t,\vec{r}) = \varphi(\vec{r})\psi(t)$ と変数分離し、$\psi(t)$ を用いて関数 $\psi_E(\bar{E})$ を以下のようにフーリエ変換で定義する。

$$\psi_E(\bar{E}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{i\bar{E}t/\hbar} dt$$

$\left|\psi_E(\bar{E})\right|^2$ を求めよ。なお、$\psi(0)=1$、$\bar{E}$ は実数値とする。

(e) $\left|\psi_E(\bar{E})\right|^2$ の $\bar{E}$ 依存性の概略を図示し、不確定性原理の観点から説明せよ。

4. 2つのエネルギー状態$\varepsilon_1, \varepsilon_2$をとり得る粒子$N$個からなる系がある。ここで、$\varepsilon_1 \neq 0$、$\varepsilon_2 \neq 0$、$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$、ボルツマン定数を$k_B$として以下の各問に答えよ。

(a) この系の全エネルギーがEであるとき、系のとり得る状態数ΩをN、E、ε_1、ε_2の関数として求めよ。

(b) エネルギーε_1の粒子数をN_1、エネルギーε_2の粒子数をN_2とする。N_1とN_2が共に十分に大きいとして、この系の温度Tを近似式

$$\log n! \approx n(\log n - 1) \quad (n >> 1)$$

を用いて求めよ。

(c) 問(b)より、温度Tが負になる条件とそのときの系の状態について説明せよ。

5． 以下の誤差に関する問に答えよ。

(a) 長方形の縦と横の辺の長さを測定したところそれぞれ a、b であったとする。その長方形の面積の誤差をそれぞれの長さの測定誤差 σ_{a}, σ_{b}を用いて求めよ。

(b) (a) において $\sigma_{a}=\sigma_{b}$ の場合、同じ面積でも縦横の辺の長さの比により誤差が異なることを示し、誤差が最も小さくなる時の二辺の比を求めよ。

(c) 放射線計測を2分間行ったところ 144 カウントを得た。このとき、毎分何カウントと推定できるか。誤差をつけて答えよ。

(d) (c) の測定で線源を除いてバックグラウンドを測定したところ 5 分間で 225 カウントを得た。このとき、線源のみのカウント数は毎分何カウントか。誤差をつけて答えよ。

6．　次の問(a)～(c)に答えよ。必要なら次の数値を使って良い。

素電荷 q: $1.6\text{x}10^{-19}$C, 原子質量単位1u＝$1.66\text{x}10^{-27}$kg, アボガドロ定数 N_A=$6.0\text{x}10^{23}$/mol, 1 気圧＝$1.0\text{x}10^{5}$Pa

(a) 密度 N の気体中にイオンを入射する。気体粒子と入射イオンの衝突断面積を σ とした時、気体中での粒子の平均自由行程 λ は次式で与えられることを示せ。ただし入射イオンの速度に比べ気体原子の速度は無視できるくらいに小さいとする。

$$\lambda = \frac{1}{\sigma N}$$

(b)イオンが気体中に入射した時のイオン強度を I_0 とする。イオンが気体中を距離 x 走った時、一度も衝突していないイオン強度 $I(x)$ は次式で与えられることを示せ。

$$I(x) = I_0 \exp(-\sigma N x)$$

(c)静電場を用いてイオンを周回軌道に長時間閉じ込め衝突実験を行う静電リングという装置がある。この静電リングで C^+イオンを 2.4keV のエネルギーで周回させている。C^+イオンは残留気体との衝突でしだいに減衰する。イオンビーム強度が最初の強度の $1/e$（e ：自然対数の底）になる時をビームの寿命とする。残留気体との衝突だけで寿命が決まっているとすると、ビーム寿命を 100s にするには静電リング内の圧力は何 Pa 以下でなければならないか、有効数字 1 桁で答えよ。ただし C^+イオンの質量数は 12 で、イオンと残留気体との衝突断面積を 10^{-20}m^2、静電リングの温度は 273K とする。