2015年7月実施

2016年度 （夏季）
立教大学大学院理学研究科物理学専攻博士課程前期課程
入学試験問題（物理学）

[注意]

・配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ。

・大問は6問。

　・理論物理学研究室を第１志望とする場合は大問１～４の４問を解答せよ。

　・原子核放射線物理学研究室、または宇宙地球系物理学研究室を第１志望とする場合は、大問１～６のうち、４問を選択して答えよ。

・大問1問に付き解答用紙1枚を用い、解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。

・解答用紙が4枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。

・質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。

1. 両端に質量 m の小球のついたバネがある（バネ定数 k，自然長 ℓ）。そのバネの片方の小球を持ち上げ静かに支えた状態から，$t=0$ で手を放して自由落下させる。鉛直上方を z 軸の正の向きにとり，時刻 t におけるそれぞれの小球の位置を $z_1(t), z_2(t)$（ただし $z_1(0)=0$，$z_1(t)>z_2(t)$），小球間の距離を $z(t)$，重心の座標を $z_{\mathrm{G}}(t)$ とする。バネの重さおよび空気抵抗は無視できるものとして，以下の問いに答えよ。重力加速度を g とする。

(a) $z_{\mathrm{G}}(t)$ を $z_1(t), z_2(t)$ を用いて書け。

(b) 相対運動と重心運動の運動方程式を書け。またこの運動方程式を解くために必要な初期条件 $z(0), \dot{z}(0), z_{\mathrm{G}}(0), \dot{z}_{\mathrm{G}}(0)$ を書け。

(c) 上の運動方程式を解き，$z(t), z_{\mathrm{G}}(t), z_1(t), z_2(t)$ を求めよ。

(d) $z_1(t), z_2(t)$ の概形を同じグラフ上に書け。

2. 電流素片 $Id\vec{s}$ が電流素片から距離 r の点につくる磁束密度 $d\vec{B}$ はビオ・サヴァールの法則から

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}$$

で与えられる（μ_0 : 真空の透磁率）。以下の問いに答えよ。

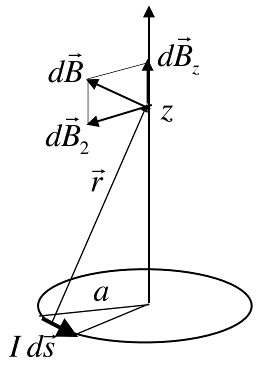

図1

(a)半径 a，強さIの円電流が，その中心を通り，円の面に垂直な直線上で中心からz の点につくる磁束密度を求めよ（図1）。

(b)次に図2のようなソレノイドコイルを考える。ソレノイドコイルを単位長さあたりn個の円電流を無限に並べたものと考えて，このコイルに電流 I を流した時、コイル中心部に生じる磁束密度 B を求めよ。

(c)ソレノイド内部の中心軸以外の磁束密度を考える。アンペールの法則を適用してソレノイド内部の磁束密度を求めよ。ソレノイドは充分に細くて長く、ソレノイドのすぐ外側の磁場は 0 と考えて良い。

(d)コイル内に鉄心を入れた場合にコイル内の磁束密度はいくらになるか。なお鉄芯の透磁率を μ とする。

(e)断面積Sで一周の長さ l の鉄環に、長さδのすきまを作ったものに導線を N 回巻きつけて電磁石を作った（図3）。これに電流 I を流した時の鉄環内の磁束密度 B、間隙の磁束密度 B_0、鉄環内の磁場の強さH、すきま部分の磁場の強さH_0を求めよ。鉄環およびすきまの外に磁束線は漏れないものとし、$\delta \ll l$ とする。μ は定数と近似できるものとする。

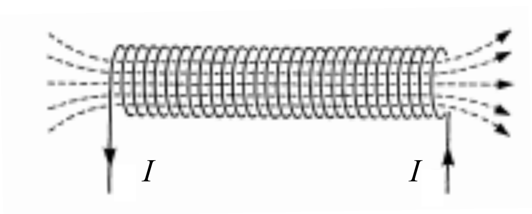

図2

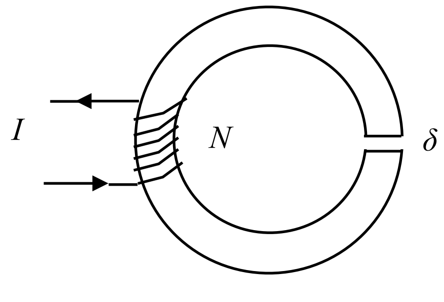

図3

3. 1次元のポテンシャル $V(x)$ のなかに質量 m の粒子があるとき、その運動の定常状態を考える。

まず、ポテンシャルがデルタ関数型

$$V(x) = -K\delta(x)$$

(K は正の定数) で与えられる場合を考える。

(a) Schrödinger 方程式を解いて、束縛状態のエネルギー固有値をすべて求めよ。

次に、ポテンシャルが

$$V(x) = -\frac{K\alpha}{2\cosh^2(\alpha x)}$$

(K, α は正の定数) で与えられる場合の束縛状態を考える。

(b) ポテンシャル $V(x)$ の概形を描け。

(c) エネルギー固有値を E とし、$\varepsilon = \sqrt{-2mE}/\hbar\alpha$ という記号を導入する。束縛状態の波動関数 ψ は $x \to \pm\infty$ で $\psi \sim \exp(-\alpha\varepsilon|x|)$ のようにふるまわなくてはならない。そこで、変数変換 $\xi = \tanh(\alpha x)$ をおこない、ψ を

$$\psi = (1-\xi^2)^{\varepsilon/2} w(\xi)$$

と置換する。$w(\xi)$ が

$$(1-\xi^2)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\xi^2} - 2(\varepsilon+1)\xi\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\xi} + \left[-\varepsilon(\varepsilon+1) + \nu(\nu+1)\right] w = 0$$

という微分方程式にしたがうことを示せ。ただし、ν は

$$\nu(\nu+1) = \frac{mK}{\hbar^2\alpha}, \quad \nu > 0$$

で定義される。

(d) 新しい変数 $u = (1-\xi)/2$ を用いて w を

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$$

の形のべき級数に展開する。これを前問で得られた微分方程式に代入し、a_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ のしたがう漸化式を求めよ。

(e) $x = -\infty$ $(u = 1)$ で w が有限であるためには、w が有限次の多項式となる必要がある。w が n 次多項式のときのエネルギー固有値 E_n を決定せよ。また、n の上限値を定める不等式を導け。

(f) $\alpha \gg mK/\hbar^2$ のときに、束縛状態のエネルギー固有値をすべて求めよ。

4. ハミルトニアンが

$$\mathcal{H} = \kappa |\mathbf{p}|^\gamma$$

で与えられる d 次元空間中の粒子を考える。ただし、κ と γ は定数であり、$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_d)$ は運動量である。この粒子 N ($\gg 1$) 個が d 次元体積 V の容器内に閉じ込められており、温度 T の熱平衡状態にある。これらの粒子は古典統計にしたがうものとする。ボルツマン定数 $k_\mathrm{B} = 1$ とする。以下で必要ならば Stirling の公式 $\ln(N!) \simeq N \ln N - N$ ($N \gg 1$) を用いてもよい。

(a) この系の分配関数 $Z(T, V, N)$ が T の何乗に比例するのかを決定せよ。

(b) この系のエネルギー $E(T, V, N)$ を求めよ。

(c) この系の状態方程式 (圧力 P と T, V, N の間に成り立つ関係式) を導け。

(d) この系の化学ポテンシャル μ は、ある定数 a を用いて

$$e^{\mu/T} = aPT^{-1-d/\gamma}$$

と表すことができる。このことを示せ。

(e) 体積を一定に保ったまま系に準静的に $\mathrm{d}'Q$ の熱を加えたときの温度変化を $\mathrm{d}T$ として、

$$C_V = \lim_{\mathrm{d}'Q \to 0} \left(\frac{\mathrm{d}'Q}{\mathrm{d}T} \right)_{V,N}$$

を定積熱容量、圧力を一定に保ったまま系に準静的に $\mathrm{d}'Q$ の熱を加えたときの温度変化を $\mathrm{d}T$ として、

$$C_P = \lim_{\mathrm{d}'Q \to 0} \left(\frac{\mathrm{d}'Q}{\mathrm{d}T} \right)_{P,N}$$

を定圧熱容量という。C_P/C_V を d と γ を用いて表せ。

5. 次の問いに答えよ。ただしプランク定数$\hbar$=1.0546x10^{-34}J・s、素電荷e =1.60x10^{-19} C、電子質量 m_e = 9.12x10^{-31} kg、陽子質量 m_p = 1.67x10^{-27} kgとする。

(a) 不確定性原理$\Delta x \Delta p \geq \hbar$から、電子を約$10^{-10}$ mの領域に閉じ込めた時の電子のおよその運動エネルギーをeV単位で求めよ(有効数字２桁）。

(b) 原子核について考える。不確定性原理から考えると原子核中の核子の運動エネルギーE_Nは原子中の電子の運動エネルギー E_A の何倍になるか。電子質量 m_e、核子質量 m_N、原子の大きさr_A、原子核の大きさ r_N を用いて表せ。またその値を概算せよ（有効数字 1 桁）。

(c)水素原子を考える。不確定性原理のため r $(=\Delta x)$ に閉じ込められた原子中の電子は、（a)で与えられる運動エネルギーをもつ。この他に電子は原子核との間のクーロン力による位置エネルギーをもつ。真空の誘電率をε_0として、水素原子の電子の全エネルギーを r の関数として求めよ。

(d)このエネルギーの最小の位置が水素原子の基底状態の軌道半径a_0と考えられる。a_0をε_0, $\hbar$, m_e, e を用いて表せ。

6. 以下の問いに答えよ。

(a) 底面が一辺の長さ (1.2 ± 0.3) cm の正方形で，高さが (50 ± 5) mm の直方体がある。質量は (14.4 ± 1.2) g である。測定値の誤差が全て統計誤差として，この直方体の誤差付きの密度を $\mathrm{kg/m^3}$ の単位で求めよ。

(b) ある放射線源からの放射線を 1 秒間計数したところ，37 個だった。次に，線源を取り除いてバックグラウンドを計数すると，1 秒間で 12 個だった。1 秒間に検出される正味の計数値とその誤差を求めよ。

(c) ある物理量を多数回測定したところ，平均値が 50.0，標準偏差 10.0 のガウス分布となった。一度の測定で測定値が次の範囲に現れる確率を有効数字 2 桁で答えよ。ただし $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.3989$ である。

(i) $40.0 \sim 60.0$ (ii) $0 \sim 60.0$ (iii) $50.0 \sim 50.1$

(d) 以下の用語から一つ選び，説明せよ。

標準偏差　　ポアソン分布　　最小自乗法　　χ^2 検定

(e) 電流計，電圧計，電源をそれぞれ一つずつ用いて，抵抗の抵抗値 R を測定するための回路図と，その測定原理を記せ。