

2017年度（春季）

立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程物理学専攻入学試験問題
(物理学)

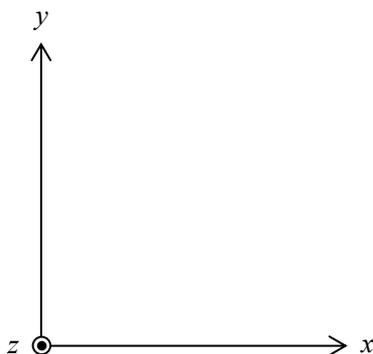
[注意] *合図があるまでこのページをめくらないこと。

1. 解答用紙が4枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えよ。
2. 配られたすべての解答用紙に受験番号を記入せよ。
3. 解答はすべて解答用紙に記入し、問題ごとに解答用紙1枚を使用せよ。
4. 問題は6問。
 - ・理論物理学研究室を第1志望とする場合は、問1～4の4問を解答せよ。
 - ・原子核放射線物理学研究室、または宇宙地球系物理学研究室を第1志望とする場合は、問1～6の中から4問を選び解答せよ。ただし5問以上答えてはならない。
5. 解答用紙の左上に、選択した問題の番号を記入すること。
6. 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えよ。

1. 空気抵抗および重力の影響のない宇宙空間を，本体の質量 M のロケットが質量 m の燃料を積んで速度 V で等速運動している。相対論的效果は無視できるとして，以下の問いに答えよ。
- (a) ある時刻から，ロケットの進行方向と逆向きに，ロケットに対して一定の相対速度 v で燃料を噴射してロケットを加速させる。燃料を微量 Δm だけ噴射した結果，速度が微量 ΔV だけ増加した。噴射の前後での運動量保存の式を立て， ΔV と Δm の関係を求めよ。ただし， ΔV と Δm に関して2次以上の項は無視して良い。
 - (b) 微量 Δm の燃料を噴射し続け，燃料が全て無くなった時のロケットの速度 V_{\max} を求めよ。
 - (c) 燃料を Δm だけ噴射したときの系の全運動エネルギーの増分 ΔE を求めよ。ただし， ΔV と Δm に関して2次以上の項は無視して良い。

2. 次の問いに答えよ。ただし、真空の誘電率及び透磁率をそれぞれ ϵ_0 及び μ_0 とする。

- (a) 半径 a の導体球の中心から距離 b ($a > b$)の位置に電荷の大きさが q の点電荷があるとき、球の内部と外部の電位を求めよ。
- (b) yz 方向に広がる 2 つの平面導体が $x = 0$ 及び $x = 1$ の位置にある。これらの2つの平面上を一樣な電流密度 i の平面電流が z 軸の正の方向に流れているとき、導体外部の磁場を求めよ。ただし、座標軸は図のように右手系にとる。



- (c) 半径 a 及び b ($a > b$)の同軸の円筒がある。それぞれの円筒の軸方向に逆向きの電流を流したときの単位長さあたりのインダクタンスを求めよ。

3. 3次元回転対称性を持ったポテンシャル $V(|\vec{x}|)$ 中での、質量 m を持った粒子の量子力学的散乱問題を考える。 z 方向に平面波波動関数 $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{x})$ (ただし、 $\vec{k} = (0, 0, k)$ とする) を入射した時、遠方でポテンシャルが十分早く落ちるとすると全波動関数は $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ で

$$\psi(\vec{x}) \sim \exp(ikz) + \frac{f_k(\theta)}{|\vec{x}|} \exp(ik|\vec{x}|)$$

と振る舞うことが期待される。ここで、 θ は z 軸方向から測った散乱角である。ボルン近似では、散乱振幅 $f_k(\theta)$ は

$$f_k(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3x V(|\vec{x}|) \exp(-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x})$$

で与えられる。ただし、散乱方向の単位ベクトル $\hat{n}(\theta)$ から作った散乱波数ベクトルを $\vec{k}' = k\hat{n}(\theta)$ と定義した。

- (a) $(\vec{k}' - \vec{k})^2 = 4|\vec{k}|^2 \sin^2(\frac{\theta}{2})$ を示せ。
 (b) 散乱ポテンシャルが湯川型 $V(|\vec{x}|) = \alpha \frac{\exp(-\mu|\vec{x}|)}{|\vec{x}|}$ で与えられる場合、散乱振幅 $f_k(\theta)$ をボルン近似で計算せよ。
 (c) 問題 (b) で $\mu \rightarrow 0$ の極限を考察することでクーロンポテンシャル $V(|\vec{x}|) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}|}$ 中でのラザフォード散乱が得られる。ボルン近似を用いて、立体角 $d\Omega$ への散乱微分断面積 $d\sigma = |f_k(\theta)|^2 d\Omega$ に対するラザフォードの公式

$$d\sigma = \left(\frac{mZe^2}{8\pi\epsilon_0\hbar^2k^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}$$

を示せ。

- (d) より一般に、クーロンポテンシャルが逆自乗則から $V(|\vec{x}|) = \frac{C_n}{|\vec{x}|^n}$ と変更を受けた時、ボルン近似で $f_k(\theta)$ の θ 依存性を決定せよ。ただし、 $f_k(\theta)$ の全体に掛かる (θ に依らない) 数係数は求めなくて良い。

4. ハミルトニアン H が、

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2)}{2}$$

である 3次元調和振動子の量子統計力学を考える。以下の問題では、必要に応じて、正定値行列 a_{ij} に関する高次元のガウス積分の公式

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{j,k} x_j a_{jk} x_k + i \sum_k b_k x_k \right) \\ &= \frac{(2\pi)^{n/2}}{\det(a_{ij})^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{j,k} b_j (a^{-1})_{jk} b_k \right) \end{aligned}$$

(ここで、 $\det(a_{ij})$ は a_{ij} の行列式、 $(a^{-1})_{ij}$ は a_{ij} の逆行列である。) を証明なしに使うて良い。また、3次元調和振動子の量子化に関して、ゼロを含む正の整数 l, m, n に対してエネルギー固有値 $E_{l,m,n} = (l + m + n + \frac{3}{2}) \hbar\omega$ で与えられる波動関数は完全系をなし、エルミート多項式 $H_n(\xi)$ を使って

$$\psi_{l,m,n} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{3/4} \frac{H_l(\sqrt{m\omega/\hbar}x) H_m(\sqrt{m\omega/\hbar}y) H_n(\sqrt{m\omega/\hbar}z)}{\sqrt{2^{l+m+n} l! n! m!}} \exp \left(-\frac{m\omega}{2\hbar} (x^2 + y^2 + z^2) \right)$$

$$H_n(\xi) = \frac{\exp(\xi^2)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-2iu)^n \exp(-u^2 + 2i\xi u) du$$

で与えられることも既知としてよい。

- (a) N をゼロを含む正の整数とした時、下から N 番目のエネルギー $E_N = (N + \frac{3}{2}) \hbar\omega$ を持つ独立な状態はいくつあるか答えよ。
- (b) カノニカル分布の分配関数 $Z = \text{Tr} \exp(-\beta H)$ を計算せよ。ここで、 Tr は状態空間のトレースである。
- (c) カノニカル分布の密度行列 $\exp(-\beta H)$ を座標表示で表した行列要素

$$\rho(x', y', z' | x, y, z) = \langle x', y', z' | \exp(-\beta H) | x, y, z \rangle$$

を計算せよ。

- (d) 高温極限 $\beta\hbar\omega \ll 1$ で、(b) で求めた密度行列の座標表示の行列要素が

$$\rho(x', y', z' | x, y, z) \sim \exp \left(-\frac{\beta m\omega^2}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \right) \delta(x' - x) \delta(y' - y) \delta(z' - z)$$

と振る舞うことを示せ。ただし、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \exp \left(-\frac{a(x-y)^2}{2} \right) = \delta(x-y)$$

を用いて良い。

5. 次の問いに答えよ。

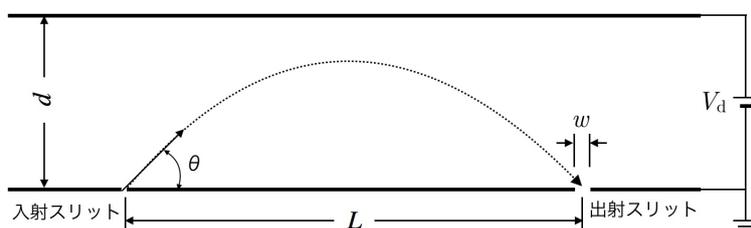
- (a) 以下にあげる検出器のうちひとつを選びその原理を説明せよ。

フォトダイオード、光電子増倍管、マイクロチャンネルプレート(MCP)、マルチピクセルフォトンカウンター(MPPC)、CCD イメージセンサー、二次電子増倍管(チャンネルトロン等)、半導体検出器(SSD)、比例計数管、シンチレーションカウンター

- (b) 光子ひとつひとつの位置検出が可能な光検出器に適切な光源と光学系を組み合わせて、光の粒子性と波動性を机上でデモンストレーションする実験装置を考案せよ。それを見れば具体的な大きさ、形状、配置、原理がわかるように実験装置を図示せよ。また、想定される実験結果を用いて光が粒子性と波動性を兼ね備えることを説明せよ。

6. 以下の問いに答えよ。

- (a) ある放射線源から放出される放射線の数をもつて1分間計数したところ400個だった。放射線源を取り除いて1分間バックグラウンド信号を計数したところ100個だった。放射線源から放射される正味の放射線の数をもつて1%の精度で測定したい場合、何分間測定すれば良いか。ただし、放射線源を置いた場合と取り除いた場合の測定時間は同じとし、測定時間内の放射線の強度の減衰は無視できるものとする。
- (b) 図のように平行に置かれた2枚の板状の金属電極がある。電極間の距離は d であり、上の電極には電圧 V_d を印加し、下の電極は接地している。下の電極には入射スリットと出射スリットがあり、その間の距離は L である。入射スリットから正の電荷を持った荷電粒子のビームを入射し、 V_d を走査して出射スリットを通り抜けた荷電粒子を検出する。これは平行平板型エネルギー分析器と呼ばれ、荷電粒子のエネルギー分析を行うことができる。以下の問いに答えよ。



- i. 下の電極にある入射スリットから、エネルギー E_0 、電荷 e の正イオンを入射角 θ で入射する。入射イオンが再び下の電極に到達した時の、入射スリットからの距離 l (> 0)を求めよ。また、 l が最大値となる入射角 θ_{\max} を求めよ。
- ii. 入射スリットから距離 L のところに幅 w の出射スリットがある。このスリットを通り抜けることができるイオンのエネルギー幅 ΔE から、このエネルギー分析器のエネルギー分解能 $\Delta E/E$ を求めよ。入射スリットの幅は十分に狭いものとし、入射角は θ_{\max} とする。
- iii. $\theta = \theta_{\max}$ のとき、このエネルギー分析器が角度収束性を持つ（入射角 θ が微量変化しても出射位置が変わらない）ことを示せ。