2016年7月実施

2017年度　（夏季）

立教大学大学院理学研究科物理学専攻博士課程前期課程

入学試験問題（物理学）

［注意］

・配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ。

・大問は６問。

　・理論物理学研究室を第１志望とする場合は大問１～４の４問を解答せよ。

　・原子核放射線物理学研究室、または宇宙地球系物理学研究室を第１志望とする場合は、大問１～６のうち、４問を選択して答えよ。

・大問１問に付き解答用紙１枚を用い、解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。

・解答用紙が４枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。

・質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。

1. 質量mの物体を座標原点から初速度0で落下させた。鉛直上方をz軸にとり、重力加速度の大きさをgとする。物体の運動について次の問いに答えよ。

(a) 速度に比例する抵抗力(比例定数$b > 0$)を受ける場合、運動方程式を解いて物体の位置を時間の関数として求めよ。また、終端速度を求めよ。

(b) 速度の自乗に比例する抵抗力(比例定数$\beta > 0$)を受ける場合、運動方程式を解いて物体の速度を時間の関数として求めよ。また、終端速度を求めよ。

(c) 抵抗力がない場合、物体のラグランジュ関数を示せ。またラグランジュ方程式を解いて、落下する物体の位置を時間の関数として求めよ。

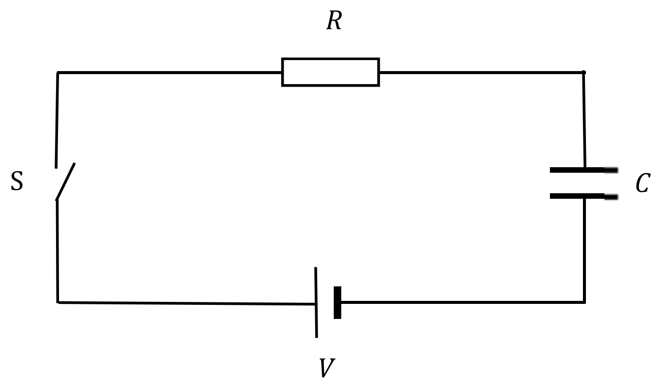
2. 図のように、容量Cのコンデンサー、抵抗値Rの抵抗、起電力Vの電池、スイッチSからなる回路がある。スイッチSを閉じてからの時間tにおけるコンデンサーに貯まった電荷$Q(t)$と回路に流れる電流$I(t)$を求めたい。以下の問いに答えよ。

(a) 電荷$Q(t)$に関する微分方程式を、$Q(t)$、C、R、Vを用いて書け。

(b) 微分方程式を解き、$Q(t)$と$I(t)$を求めよ。ただし、$Q(0) = 0$ とする。

(c) $Q(t)$と$I(t)$の概形を時間の関数としてグラフに表せ。

(d) 図中のコンデンサーをインダクタンスLのコイルに置き換える。この時、スイッチSを閉じてからの時間tにおける回路に流れる電流$I(t)$を求めよ。



図

3. ハミルトン演算子

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

で表される1次元量子系を考える。ここで、$\hat{p}$ は運動量演算子、$\hat{x}$ は位置演算子、m は粒子の質量、ω は古典力学における角振動数に対応する量である。いまこの系に、位置 x に依存しない大きさ λF_0 の力が x の減少する向きに働いている場合を考える。このときハミルトン演算子の摂動項は $\hat{H}' = \lambda\hat{x}F_0$ で与えられる。いま、$\lambda << 1$ として加えられた摂動は小さいものとする。摂動を加えた系のハミルトン演算子を $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ として、固有関数を、

$$u_n(x) = u_n^{(0)}(x) + u_n^{(1)}(x) + \cdots + u_n^{(k)}(x) + \cdots \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

エネルギー固有値を、

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + \cdots + E_n^{(k)} + \cdots$$

と摂動展開する。ここで、$u_n^{(0)}(x)$ と $E_n^{(0)}$ は $\hat{H}_0$ に対する固有関数とエネルギー固有値、$u_n^{(k)}(x)$、$E_n^{(k)}\,(k \geq 1)$ は摂動を加えた系における λ^k に比例する摂動項である。また、$\{u_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ は正規直交基底をなしており、$\{u_n^{(k)}\}_{n=0,1,2,\cdots}$ も $k = 0,1,2,\cdots$ を固定すると、各 k について正規直交基底を張る。いま、演算子 $\hat{p}$ と $\hat{x}$ を用いて、演算子 $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) \quad 、 \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$$

と定義する。以下の設問に答えよ。

(a) $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を用いて、演算子 $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ の交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ を求めよ。

(b) 無摂動系の固有関数 $u_{n+1}^{(0)}(x)$ と $u_{n-1}^{(0)}(x)$ を $u_n^{(0)}(x)$ を用いて、

$$u_{n+1}^{(0)}(x) = b_{n+1}\hat{a}^\dagger u_n^{(0)}(x)、\ (n \geq 0) \quad u_{n-1}^{(0)}(x) = d_{n-1}\hat{a}u_n^{(0)}(x)、\quad (n \geq 1)$$

および、$\hat{a}u_0^{(0)}(x) = 0$ と定義する。b_{n+1} と d_{n-1} を求めよ。ここで、b_{n+1} と d_{n-1} は正の実数とする。

(c) ハミルトン演算子 $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ を演算子 $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を用いて表せ。

(d) 第1次摂動項を求めるために、$u_n^{(1)}(x)$ を無摂動系の固有関数 $u_l^{(0)}(x)$ で

$$u_n^{(1)}(x) = \sum_l C_{nl}^{(1)} u_l^{(0)}(x)$$

と展開する。λ^2 以上の寄与は無視する近似で、摂動系のエネルギー固有値 E_n を求め、波動関数 $u_n(x)$ を無摂動系の波動関数を用いて表せ。

4. 外部磁場 $B>0$ の中に磁気モーメント μ を持つ N 個の粒子が1次元に配列されている系を考える。ここで、$N+1$ 番目の粒子を1番目の粒子と同一視する周期的条件を置く。各粒子が隣り合う粒子とのみ結合の強さ $J>0$ で相互作用をする場合、この系のエネルギーは

$$E=-\frac{1}{2}\mu B\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i+\sigma_{i+1})-J\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1}$$

で与えられる。ここで、σ_i は $\sigma_i=+1$ あるいは $\sigma_i=-1$ のみを取るものとする。系の温度を T として、この系の分配関数を行列

$$Q=\begin{pmatrix} e^{\beta(J+\mu B)} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-\mu B)} \end{pmatrix}$$

の N 乗 (Q^N) の対角成分の和を用いて

$$Z_N(B,T)=\sum_{k=1}^{2}(Q^N)_{kk}$$

と表すことができる。ここで、$\beta^{-1}=k_BT$ 、k_B はボルツマン定数である。以下の設問に答えよ。

(a) 系の温度を T として、$N=2$ の場合について分配関数を計算し、行列 Q を用いた分配関数 $Z_2(B,T)$ と一致することを示せ。

(b) 行列 Q を対角化したときの対角成分を λ_1 と λ_2 とする。λ_1 と λ_2 を用いて $Z_N(B,T)$ を表せ。

(c) 1粒子あたりの自由エネルギー f を λ_1 と λ_2 を用いて表せ。

(d) λ_1 と λ_2 を求めよ。ここで、$\lambda_1>\lambda_2$ とする。

(e) 1粒子あたりの自由エネルギー f を求めよ。なお、マクロな系では N が十分大きいので、λ_1 の寄与のみを考えれば十分である。

(f) 設問 (e)で求めた自由エネルギー f を用いて、1粒子あたりの磁化 $M=-\partial f/\partial B$ の高温極限 $(T\to\infty)$ と低温極限 $(T\to 0)$ を求め、M の温度依存性の概略を図示せよ。

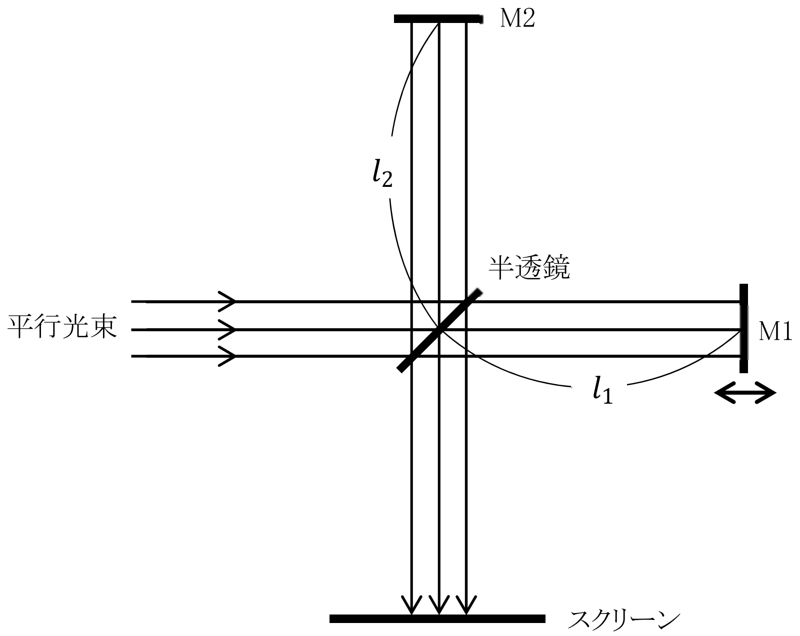
5. 図に示すように真空中を進む平行光束が半透鏡（反射率 50%、透過率 50%）によって 2 つの光束に分かれる。2 つの光束はそれぞれ半透鏡から距離l_1、l_2離れた位置にある 2 つの鏡（M1、M2）によって反射され、半透鏡で再び重ね合わされてスクリーンに投影される。光の周波数をνとして、スクリーンに入射する光束のスペクトルを$B(\nu)$、スクリーンを照らしている強度をLとする。M1 及び M2 で反射した光束の波面がスクリーン位置で完全に一致しており、光路差が 0 のとき、$L = \int_0^\infty B(\nu)d\nu$である。以下の問いに答えよ。

(a) 微少な周波数幅$(\nu, \nu + \mathrm{d}\nu)$に含まれる光束$B(\nu)\mathrm{d}\nu$がスクリーンを照らしている強度を$\mathrm{d}L$とする。M1 及び M2 で反射した光束の波面がスクリーン位置で一致するように保ったまま、光路差 0 の状態から、M1 をゆっくりと平行移動させた。$\mathrm{d}L$が一旦 0 になり、再び元の強度に戻ったところで M1 を停止させた。このときの光路差xと周波数νの関係を示せ。

(b) 任意の光路差xのとき、$\mathrm{d}L$と$B(\nu)\mathrm{d}\nu$の関係を示せ。

(c) 光路差が 0 の状態でスクリーンを照らしている強度を観測する。何らかの理由でl_1がその10^{-10}倍の長さだけ伸縮すると、波長$400\ \mathrm{nm}$での$\mathrm{d}L$が最大値から 0 まで変化するようにしたい。l_1をいくらに設定すればよいか。

(d) 光路差が 0 のとき、M1 をわずかに傾けた。光束$B(\nu)\mathrm{d}\nu$がスクリーン上に作り出す干渉縞の間隔がdのとき M1 を傾けた角度θと波長λの関係を求めよ。



図

6. 以下の問いに答えよ。

(a) 質量 $(1.0 \pm 0.2) \times 10^3$ g の物体が速度 $(2.00 \pm 0.10) \times 10^2$ cm/s で等速直線運動している。この物体の運動エネルギーとその誤差をジュールの単位で求めよ。

(b) 測定値 A、B、C はそれぞれ誤差 ΔA、ΔB、ΔC を持つ。以下の場合について、Z の誤差 ΔZ、あるいは誤差の割合 $\Delta Z/Z$ を求めよ。誤差は偶然誤差のみであり、p、q、r は定数である。

i. $Z = pA - qB + rC$

ii. $Z = \exp(pA)$

iii. $Z = \dfrac{pAB^3}{qC^2}$

(c) ガウス分布は以下の式で表される。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} \exp\left[-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}\right]$$

確率変数 x がガウス分布に従って分布する場合、標準偏差は式中の σ となることを示せ。ただし X は x の平均値とする。必要であれば以下の公式を用いて良い。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sqrt{2\pi}\sigma^3$$