

2018年2月23日実施

2018年度（春季）

立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程物理学専攻入学試験問題

（物理学）

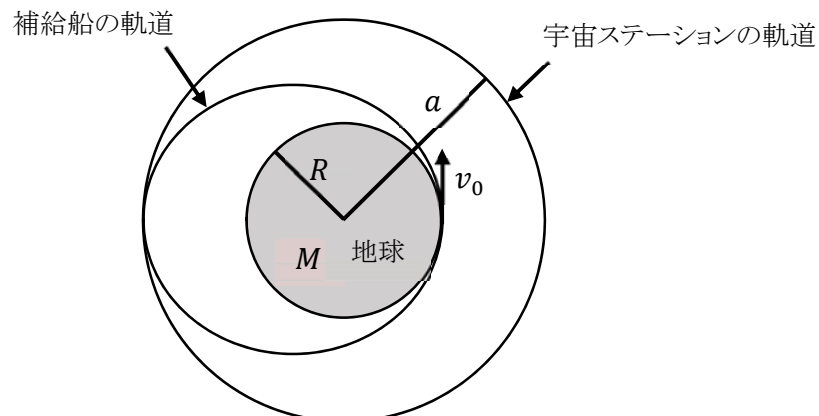
〔注意〕 ＊合図があるまでこのページをめくらないこと。

1. 配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ。
2. 大問は6問。
 - ・ 理論物理学研究室を第1志望とする場合は大問1～4の4問を解答せよ。
 - ・ 原子核放射線物理学研究室、または宇宙地球系物理学研究室を第1志望とする場合は、大問1～6のうち、4問を選択して答えよ。
3. 大問1問につき解答用紙1枚を用い、解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。
4. 解答用紙が4枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。
5. 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。

1. 図に示すように、質量 M 、半径 R の地球の赤道面上を、半径 a の円軌道で東向きに周回する宇宙ステーションがある。この軌道面内で、地表から水平方向に東向きに質量 m の補給船を初速度 v_0 で打ち出し、その軌道が宇宙ステーションの軌道に接するようにしたい。補給船は、宇宙ステーションにドッキングする際に、推力を発生するエンジンを使用するが、それ以外の軌道上ではエンジンを使用しない。位置座標の原点を地球中心にとり、補給船の位置ベクトルを \mathbf{r} 、重力定数を G とする。地球の自転による影響及び空気抵抗は無視してよい。以下の問いに答えよ。

- (a) 地表における重力加速度 g を G 、 M および R で表せ。
- (b) 補給船の力学的エネルギー E と地球中心周りの角運動量ベクトル \mathbf{L} の大きさを求めよ。
- (c) 補給船について、近地点と遠地点におけるエネルギー保存則及び角運動量保存則を用いて、初速度 v_0 を G 、 M 、 R および a で表せ。
- (d) 補給船が遠地点で宇宙ステーションにドッキングするために、補給船は遠地点で速度を調節して宇宙ステーションの速度に一致させる必要がある。それは増速か減速か、またその速度変化の大きさを求めよ。
- (e) 補給船がエンジンを使用しないとき、以下の式で定義される離心ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$ は時間的に一定であることを示せ。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}}{GMm} - \frac{\mathbf{r}}{r}$$



図

2. 電流のつくる磁場について考える。真空中におかれた太さが一定の細い導線に直線電流 I が流れている。真空の誘電率を ϵ_0 、透磁率を μ_0 、光速を c とする。以下の問いに答えよ。

- (a) 直線電流から動径方向に r 離れた点における、磁束密度の大きさ B を書け。また、その方向を図示せよ。
- (b) 直線電流の流れる方向を z 軸とし、 z 方向の単位ベクトル \hat{z} 、動径方向の単位ベクトル \hat{r} を用いて、電流からの距離 r の位置における磁束密度ベクトル \mathbf{B} を書け。
- (c) この導線の長さ1 mあたり、アボガドロ数 N_A 個の電子が電流を運んでいるとする。 $I=1$ Aの時、電子の平均の速さ v を有効数字1桁で求めよ。ただし、 $N_A = 6.0 \times 10^{23}$ /mol、電気素量 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ Cを用いてよい。

次に、この電流を運んでいる電子の平均速度 v と同じ速度で電流と平行に動く観測者 S' からこの電流を観測する状況を、相対論的に考える。簡単のため、電子は全て同じ速さ v で動いているとしてよい。

- (d) 電子の静止系 S' では、電子の線密度は λ' であった。 S' 系において、直線電流から動径方向に r' 離れた点における、線密度 λ' の電子の作る電場の大きさ E' を λ' を用いて書け。また、その方向を図示せよ。
- (e) 導線と平行で、 S' 系で静止している棒の長さは、導線の静止系である S 系ではローレンツ収縮をして長さが変化して見えると考え、 S 系での電子の線密度 λ を λ' を用いて表せ。
- (f) 特殊相対論では電磁場は、 γ をローレンツ因子とするローレンツ変換で下記のように変換される。

$$c\mathbf{B}_T = \gamma(c\mathbf{B}'_T + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}')$$

ここで $\mathbf{B}_T, \mathbf{E}_T$ ($\mathbf{B}'_T, \mathbf{E}'_T$)はそれぞれ S (S')系における、磁場と電場の速度 \mathbf{v} に垂直な成分を表す。速度 \mathbf{v} に平行な成分は変換で不変である。ここで、 S' 系では電子の作る電流はないので電子の作る磁場 \mathbf{B}'_T は0である。この時、小問(d)で求めた S' 系において平均的に静止している電子集団の作る電場 \mathbf{E}' を、ローレンツ変換して求める S 系における磁場 \mathbf{B}_T が、小問(b)で求めた磁束密度ベクトルと一致することを示せ。なお、対称性からここでは電場は垂直成分だけであり、 $\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_T$ である。

3. 電荷 $-e < 0$ の電子と電荷 $Ze > 0$ の原子核の電磁相互作用による散乱を考える。ここで、 e は素電荷である。いま、始状態における入射電子の波動関数を φ_i 、終状態における散乱後の電子の波動関数を φ_f とする。また、原子核の波動関数は散乱により変わらないとして、その陽子成分を ϕ とする。 ϕ に対する規格化条件は $\langle \phi | \phi \rangle = Z$ とする。なお、原子核内にある Z 個の陽子のつくる電荷密度 ρ は $\rho = e|\phi|^2$ であるとする。始状態と終状態の波動関数をそれぞれ、

$$\psi_i = \varphi_i(\mathbf{r}_1)\phi(\mathbf{r}_2), \quad \psi_f = \varphi_f(\mathbf{r}_1)\phi(\mathbf{r}_2)$$

とおく。ここで、 \mathbf{r}_1 は電子の波動関数の空間座標、 \mathbf{r}_2 は陽子の波動関数の空間座標である。また、電子の散乱前後の波動関数は運動量演算子 $\hat{\mathbf{p}}$ の固有関数であり、電子の入射時の運動量は \mathbf{p}_0 、散乱後の運動量は \mathbf{p} とする。ここで、距離 r 離れた電子と原子核内の素電荷の電磁相互作用ポテンシャルを原子核の周りの電子雲による遮蔽効果を考慮して

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/D}$$

であるとする。 $D > 0$ は遮蔽長、 ϵ_0 は真空の誘電率である。以下の問いに答えよ。

- (a) $\varphi_i(\mathbf{r}_1)$ と $\varphi_f(\mathbf{r}_1)$ を求めよ。ここで、直交規格化条件は、3次元の δ 関数を用いて $\langle \varphi_f | \varphi_i \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p})$ であり、波動関数の規格化定数は正の実数とする。
- (b) 原子核—電子系の遷移振幅を、ボルン近似を用いて

$$\langle \psi_f | V | \psi_i \rangle = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int |\phi(\mathbf{r}_2)|^2 K(\mathbf{r}_2) d^3\mathbf{r}_2$$

と書いたときの $K(\mathbf{r}_2)$ を求めよ。

- (c) ϕ は

$$\begin{aligned} |\phi(\mathbf{r}_2)|^2 &= 0 & (|\mathbf{r}_2| > R_c) \\ |\phi(\mathbf{r}_2)|^2 &= A & (|\mathbf{r}_2| \leq R_c) \end{aligned}$$

であるとする。 ϕ に対する規格化条件より定数 A を求め、 $\langle \psi_f | V | \psi_i \rangle$ を計算せよ。

4. 相互作用をするフェルミ粒子の量子気体のエネルギーを

$$E = \sum_{r=1}^{\infty} n_r \varepsilon_r + U$$

とする。ここで、 U は相互作用エネルギー、 ε_r は1粒子状態のエネルギー、 n_r は1粒子状態の占有数である。また、粒子数 N を系の体積 V で割って粒子密度を $n = N/V$ と定義する。系の温度を T 、化学ポテンシャルを μ 、ボルツマン定数を k_B として、以下の問いに答えよ。

(a) $U = 0$ のときの大分配関数 $Z(T, V, \mu)$ を求めよ。

(b) 小問(a)で求めた $Z(T, V, \mu)$ を用いて、系の平均粒子数 \bar{N} 、平均エネルギー \bar{E} 、エントロピー S をそれぞれ求めよ。

(c) 以下では $U \neq 0$ の場合を考える。ここで、 U は系の体積 V と系の粒子密度 n の関数 $u(n)$ であるとして、

$$U(V, n) = Vu(n)$$

とする。また、平均粒子数密度 \bar{n} を用いて、 $|n - \bar{n}|/\bar{n} \ll 1$ であるとして、 $u(n)$ を

$$u(n) \cong u(\bar{n}) + u'(\bar{n})(n - \bar{n})$$

と近似する。ここで、 $u'(\bar{n}) = du/dn|_{n=\bar{n}}$ である。このときの大分配関数 $Z(T, V, \mu)$ を求め、系の平均粒子数 \bar{N} を求める式を導出せよ。

5. 下記の選択肢:A-F から一つを選び、それを得るための測定実験を考える。解答用紙に選んだ選択肢を明記した上で、以下の問いに答えよ。すべての解答を、解答用紙片面一枚で論ぜよ。

選択肢

- A: アルファ線源から放出される、アルファ線のエネルギースペクトル。
B: ベータ線源から放出される、ベータ線のエネルギースペクトル。
C: ガンマ線源から放出される、ガンマ線のエネルギースペクトル。
D: 地上における宇宙線のエネルギースペクトル。
E: エックス線源から放出される、エックス線のエネルギースペクトル。
F: 太陽、恒星から放出される、可視光線のエネルギースペクトル。

設問

- (a) 検出器を含む複数の異なる装置の組み合わせからなる実験装置を考案し、装置の関係を示す全体図を描け。また、それぞれの装置の役割を説明せよ。
- (b) 小問(a)の検出器に関して、その検出の原理と構造をできるだけ詳しく説明せよ。
- (c) 観測対象の粒子線・電磁波が発生する物理現象に関して、できるだけ詳しく説明せよ。
- (d) その測定における主な誤差の原因を列挙し、それぞれの抑制方法の考えを述べよ。

6. 以下の問いに答えよ。

- (a) ある物理量について同じ測定を9回行ったところ、表に示す値が得られた。測定値は正規分布に従うとして、この結果から、この物理量の最良推定値及び推定誤差を求めよ。

測定回	1	2	3	4	5	6	7	8	9
値	10.2	9.7	10.6	9.4	9.6	10.5	10.4	9.3	10.3

- (b) 測定値 A 、 B 、 C はそれぞれ偶然誤差 ΔA 、 ΔB 、 ΔC を持つ。 X が以下の式で表されるとき、 X の偶然誤差 ΔX を求めよ。

$$X = \frac{A^2 B}{C^3}$$

- (c) ある放射線源から放出される放射線を1分間計数したところ523個であった。放射線源を取り除いて4分間バックグラウンドを計数したところ96個であった。正味の放射線の計数率とその誤差を求めよ。ただし、時間計測の誤差は考慮しなくてよい。