2017年7月16日実施

2018年度　（夏季）

立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程物理学専攻入学試験問題

（物理学）

〔注意〕 ＊合図があるまでこのページをめくらないこと。

1．配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ。

2．大問は6問。

- 理論物理学研究室を第1志望とする場合は大問1～4の4問を解答せよ。
- 原子核放射線物理学研究室、または宇宙地球系物理学研究室を第1志望とする場合は、大問1～6のうち、4問を選択して答えよ。

3．大問1問に付き解答用紙1枚を用い、解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。

4．解答用紙が4枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。

5．質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。

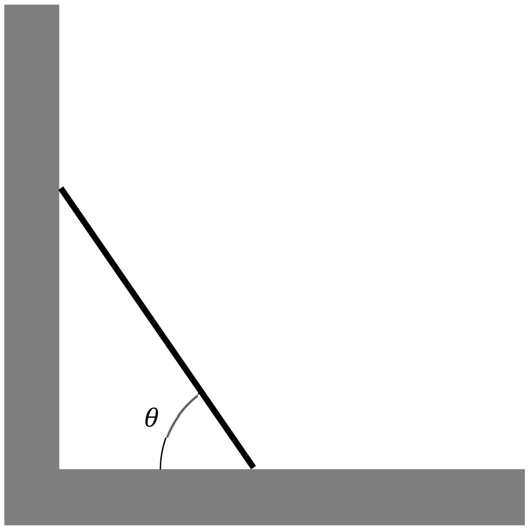
1. 図のような滑らかな鉛直壁と水平床がある。長さ ℓ、質量 M の一様な棒を、両端が壁と床に接するように鉛直面内に置き、静かに離した。この鉛直面内で鉛直壁と水平床の交わる点を原点とし、水平を x 方向に、垂直上方を y 方向にとる。棒が床となす角 θ は、棒を離したときに α(ただし $0 < \alpha < \pi/2$) であった。重力加速度の大きさを g として、以下の問いに答えよ。

(a) 棒の重心を通り、棒に垂直な軸の周りの慣性モーメント I を求めよ。

(b) θ についての棒の運動方程式を求めよ。

(c) 力学的エネルギー保存の式を $\theta, \dot{\theta}, \alpha, M, \ell$ を用いて表せ。

(d) 棒が壁から離れるときの θ を求めよ。



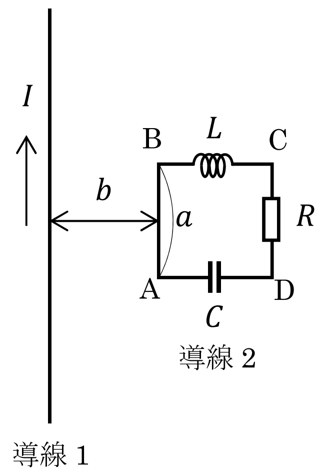
2. 図に示すように、無限に長く、細い直線状導線 1 と一辺の長さがaの正方形の細い導線 2 が同一平面上にある。導線 2 の辺 AB は導線 1 と平行で導線 1 から距離bだけ離れている。導線 2 はコイル（インダクタンスL）、抵抗（抵抗R）、コンデンサ（キャパシタンスC）が直列に接続された回路を形成している。導線 1 には電流Iが流れている。ただし、電流は図の矢印の向きを正とし、真空の透磁率をμ_0とする。次の問いに答えよ。

(a) 点 A での磁束密度の大きさと向きを求めよ。

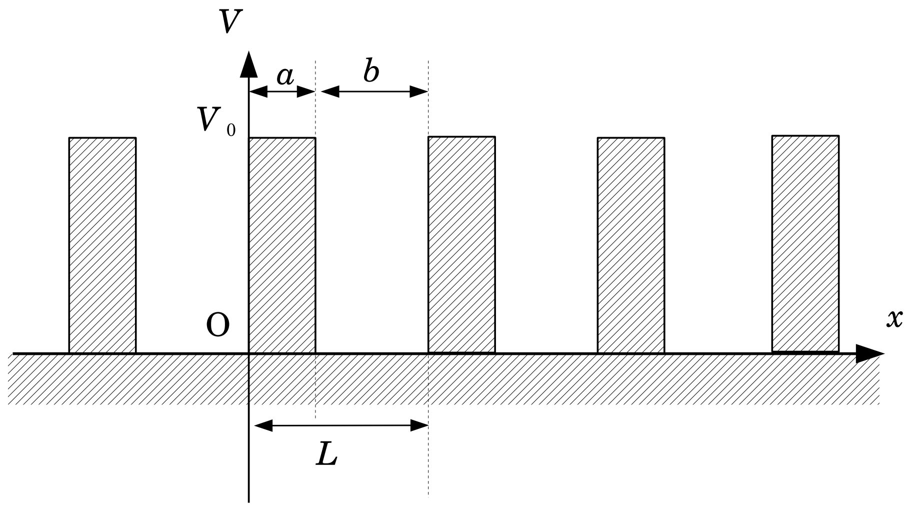
(b) 正方形 ABCD を貫く磁束Φを求めよ。ただし、紙面の表から裏へ向かう磁束の向きを正とする。

(c) 導線 1 に流れる電流が$I = I_0 \cos\omega t$のように時間変化するとき、導線 2 の回路に生じる起電力を求めよ。ただし、I_0、ωは定数である。

(d) 導線 1 に(c)で与えられる電流を流し続けて十分に時間が経ったときに、導線 2 に流れる電流を求めよ。ただし、A から B に向かう電流の向きを正とする。また、導線 2 に流れる電流は非常に小さく、導線 1 に流れる電流に影響を与えないとする。



3. 下の図のように $-\infty < x < \infty$ において周期 L をもつポテンシャル $V(x)$ に対する質量 m の粒子の１次元ポテンシャル問題を考える。$a + b = L$ である。以下の問に答えよ。



(a) 関数を L だけ平行移動する演算子を $\hat{T}$ とする。$\hat{T}$ とハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}$ が交換可能であることを示せ。

(b) エネルギー固有状態の波動関数として

$$u(x + L) = u(x)\exp(i\theta)$$

を満たすものを選ぶことができることを示せ。ただし、θ は実数の定数である。

(c) エネルギー固有値 E は以下の方程式で決まることを証明せよ。

$$\cosh \kappa a \cos kb + \frac{\kappa^2 - k^2}{2\kappa k} \sinh \kappa a \sin kb = \cos\theta$$

ただし $0 \leq E \leq V_0$ とし

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

とする。

(d) $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ であることから、エネルギー固有値がバンド構造をなすことを示せ。

4. Ising 模型で平均場近似を用いる。i 番目のスピンのハミルトニアンを

$$\hat{\mathcal{H}}_i = -Jz\langle\hat{\sigma}\rangle\hat{\sigma}_i - \mu H\hat{\sigma}_i$$

と書く。ここで $\hat{\sigma}_i$ は i 番目のスピンの値で ± 1 をとる。H は外部磁場であり、J はスピン間の相互作用を表す正の定数である。z は一つのスピンと相互作用するスピンの数、$\langle\hat{\sigma}\rangle$ は自己無撞着的に決めるべき平均場である。Boltzmann 定数を k とする。以下の問に答えよ。

(a) ハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}_i$ にカノニカル分布を用いて $\langle\hat{\sigma}\rangle$ を決定する方程式を導け。

(b) $H = 0$ のとき、温度 T が臨界温度 T_c より低くなると自発磁化が現れる。T_c を求めよ。

(c) $T < T_c$ とする。$H = 0$ かつ $(T_c - T) \ll T_c$ のとき、$\langle\hat{\sigma}\rangle$ は $(T_c - T)^{1/2}$ に比例する。その比例係数を T_c を用いて表せ。

(d) $|T_c - T| \ll T_c$ のとき、帯磁率

$$\chi = \lim_{H\to 0}\frac{\partial M}{\partial H}$$

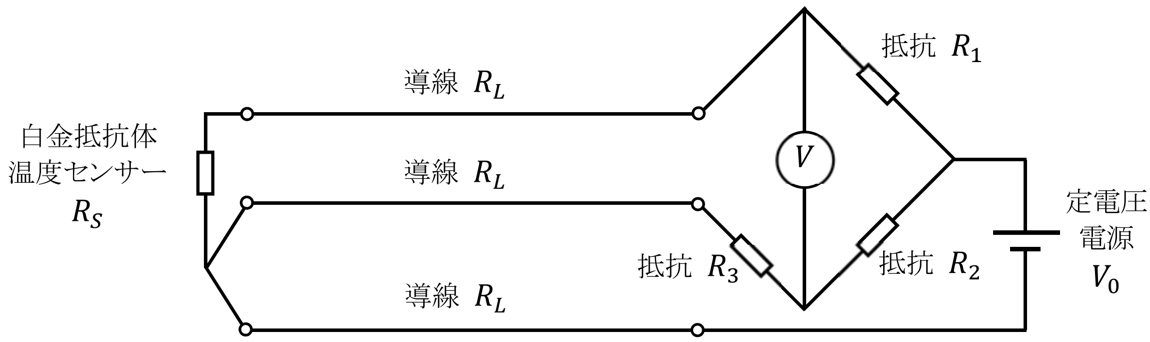
を $T > T_c$ および $T < T_c$ の場合についてそれぞれ求めよ。ただし磁化 M は単位体積当たりのスピン数密度 n を用いて $M = n\mu\langle\hat{\sigma}\rangle$ と表される。

5．白金抵抗体温度センサーを使用した温度計測について、次の問いに答えよ。

(a) 白金抵抗体の抵抗の温度係数は正か負か、また抵抗が温度依存性を示す原理を説明せよ。

(b) 白金抵抗体温度センサーを使用する際に図に示すように3線式で配線し、ブリッジ回路を使用することがある。このような方式を使用する理由を説明せよ。

(c) 白金抵抗体温度センサーの抵抗をR_S、3本の導線の抵抗は全て等しくR_L、定電圧電源の電圧をV_0、ブリッジ回路の抵抗R_1、R_2、R_3は等しく、$\Delta R = R_S - R_1$とする。図中に示したブリッジ回路の電圧VとΔRの関係式を求めよ。ただし、$\Delta R/R_1$及びR_L/R_1の2次以上の項は微少量として無視してよい。



6. 放射線検出器を用いてある放射線源を測定したところ、10 分の測定で 900 の計数を得た。次に、バックグラウンドを測定したところ 10 分で 100 の計数であった。以下の問いに答えよ。ただし、バックグラウンド測定では放射線源がないこと以外は、同じ計測条件であるとする。

(a) この線源による正味の計数率とその誤差を求めよ。

(b) さらに 100 分の測定時間が使えるとき、真の計数率を最も精度良く求めるにはどのように測定を行えばよいかを統計誤差を考慮して論じよ。

(c) 最初の測定後、測定環境を改善してバックグラウンドを 10 分測定したところ計数が 50 に減った。そこで、この状態で放射線源を 90 分測定することにした。これらの測定と元の測定とを合わせると、正味の計数率の誤差はどうなると期待できるか。