2019年　2月　25日実施

# 2019年度（春季）

# 立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程物理学専攻入学試験問題

# （物理学）

〔注意〕＊合図があるまでこのページをめくらないこと。

１．配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ。

２．大問は６問。

**・理論物理学研究室を第１志望とする場合は大問１～４の４問を解答せよ。**

**・原子核・放射線物理学研究室または宇宙地球系物理学研究室を第１志望とする場合は、大問１～６のうち、４問を選択して答えよ。**

３．大問１問につき解答用紙１枚を用い、解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。

４．解答用紙が４枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。

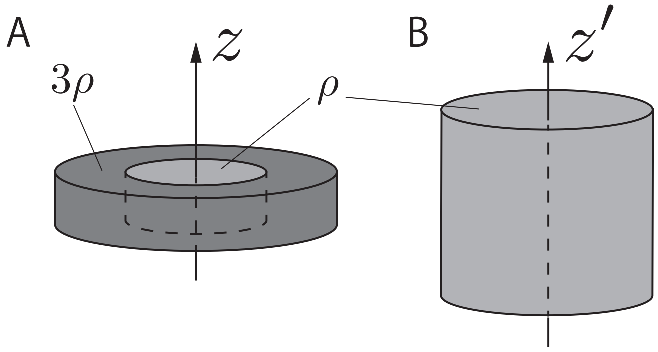
５．質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。

1. 図に示すような，2つの物体A，Bからなる系がある。物体A，Bは，それぞれ半径$2a$，高さ$h$の円柱と，半径$\frac{3}{2}a$，高さ$4h$の円柱である。物体Aの半径$r \leq a$の部分および物体Bは密度$\rho$の，物体Aの$r > a$の部分は密度$3\rho$の一様な物質で作られている。$z$軸，$z'$軸はそれぞれの中心軸であり，いま2つの軸は平行に置かれている。ただし物体AとBは剛体であるとする。

(a) 物体Aの$z$軸まわりの慣性モーメント$I_A$を求めよ。

(b) 物体A，Bを，それぞれの中心軸を固定軸として，軸のまわりに回転できるよう固定した。物体Aが角速度$\omega$で回転しており，物体Bが回転していない状態で，互いの中心軸を平行に保ったままゆっくり近づけて接触させると，互いの接触面に摩擦力が働き，やがて縁同士滑ることなく回転するようになった。このとき物体A，Bの角速度$\omega_A$，$\omega_B$を符号を含めて求めよ。

(c) (b)において，接触によって系から失われた運動エネルギーを求めよ。



2. 以下の問いに答えよ。ただし，真空の誘電率を $\varepsilon_0$，真空の透磁率を $\mu_0$ とする。

(a) 半径 $a$ の球内に電荷 $Q$ が一様に分布している。このとき，球の中心からの距離 $r$ の位置における電位 $\phi(r)$ を求めよ。ただし，無限遠方の電位 $\phi(\infty)$ を 0 とする。

(b) 半径 $a$ の薄い導体円板を一様な磁束密度 $\mathbf{B}$ の中に磁力線が円板面を垂直に貫くように置く。この円板を一定の角速度 $\omega$ で回転させるとき，円板の中心 O と縁の点 P の間に発生する誘導起電力の大きさを求めよ。

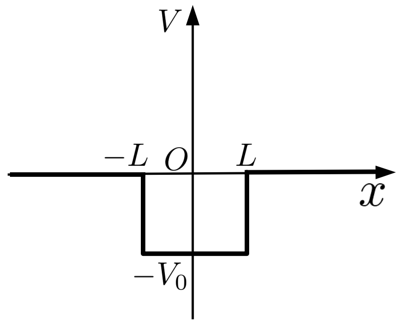
(c) 一様な電場 $\mathbf{E}$ の中に双極子モーメント $\mathbf{p}$ の電気双極子が置かれている。ただし，$\mathbf{E}$ と $\mathbf{p}$ のなす角を $\theta$ とする。電気双極子に働く力のモーメントの大きさ $M$ 及び電気双極子の静電エネルギー $U$ を求めよ。

(d) 細い導線で作った長方形の回路に電流 $I$ が流れている。長方形の 2 辺の長さは $2a$，$2b$ とする。この回路が $yz$ 面内にあり，長方形の中心を原点 O とするとき，$x$ 軸上の点 $\mathrm{P}(x, 0, 0)$ における磁束密度の大きさ $B$ を求めよ。

3. 1次元空間において，図のように

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < -L,\ L < x \ \text{のとき}) \\ -V_0 & (-L \leq x \leq L \ \text{のとき}) \end{cases}$$

によって与えられたポテンシャル中を運動する質量 $m$ の粒子の量子力学系の束縛状態（エネルギー固有値 $E$ が負のエネルギー固有状態）について，以下の問いに答えよ。ただし $L > 0$，$V_0 > 0$ とする。




(a) エネルギー固有状態の波動関数 $\psi(x)$ は $\psi(-x) = \psi(x)$（偶パリティ）または $\psi(-x) = -\psi(x)$（奇パリティ）のいずれかを満たすことを示せ。ただしエネルギー固有状態に縮退はないものとして良い。

(b) $\xi$ と $\eta$ を

$$\xi = \sqrt{\frac{2m(V_0 - |E|)}{\hbar^2}}L, \quad \eta = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}L$$

とおくと，エネルギー固有状態は $\xi\eta$ 平面における円とある曲線 $C$ との第一象限における交点として定まる。偶パリティと奇パリティそれぞれの場合についてこの曲線 $C$ を表す方程式を求めよ。

(c) エネルギー固有状態の数が $V_0$ の値の範囲によってどう変わるかを，偶パリティ，奇パリティのそれぞれについて求めよ。

(d) $V_0$ が $\hbar^2/(2mL^2)$ に比べて十分小さいとき，全てのエネルギー固有状態のパリティを求め，そのエネルギー固有値を $m$，$V_0$，$L$，$\hbar$ を用いて表せ。

4. 大きさ $H$ の一様外部磁場中で格子点上に固定された $N$ 個の粒子からなる系を考えよう。格子点を $i=1,2,\cdots,N$ と番号付けし，$i$ 番目の格子点にある粒子のスピンを $\hat{\sigma}_i$ とする。ここで，$\hat{\sigma}_i$ は 1 または $-1$ の値をとる。$\mu_0$ をスピン一つの磁気モーメントを表す正の定数とする。以下の問いに答えよ。

(a) 粒子間のスピン相互作用がないとすると，この系のハミルトニアンは

$$\hat{H} = -\mu_0 H \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i$$

で与えられる。分配関数 $Z(\beta, H)$ を求めよ。さらにこの系がカノニカル分布するとして磁化 $\hat{m}$ の期待値を逆温度 $\beta$ と $H$ の関数として求めよ。ただし

$$\hat{m} := \mu_0 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i$$

と定義する。

(b) 次に，隣接する格子点にある粒子同士がスピン相互作用するとしよう。この系のハミルトニアンは

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j - \mu_0 H \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i$$

で与えられる。ただし $J>0$ とし，$\langle i,j \rangle$ は隣接する格子点の組を表す。この模型の平均場近似を以下のように導入しよう。いま系が十分に大きくてどの格子点をとってきてもその点の粒子のスピンの期待値は変わらないとする。そこでどれでもよい一つの格子点を 0 番目と番号付けしなおして，$\psi = \langle \hat{\sigma}_0 \rangle$ とおく。他の格子点上の粒子のスピンの期待値も同じ $\psi$ であることから，ハミルトニアンのうちこの 0 番目の格子点に関わる部分を

$$\hat{\tilde{H}}^{(0)} = -Jz\psi\hat{\sigma}_0 - \mu_0 H \hat{\sigma}_0$$

と置き換える。ただし $z$ は 0 番目の格子点に隣接する格子点の数である。この式では，$Jz\psi$ という量が外部磁場による量 $\mu_0 H$ と全く対等の働きをしている。これによって，系がカノニカル分布に従うとして，$\langle \hat{\sigma}_0 \rangle$ を $\psi$ の関数として形式的に計算することができる。これが $\psi$ に等しくなければここまでの議論が成り立たないことから，自己無撞着方程式（自己整合方程式）が導かれる。この議論に従って自己無撞着方程式を導け。

(c) (b) で導いた自己無撞着方程式を用いて，この模型での $H=0$ における相転移をグラフを使って論じ，転移温度を求めよ。

5. 単色光を出す光源，回折格子，光が入射した位置を検出できる撮像素子がある。その撮像素子は光源から放出された個々の光子を検出（フォトンカウンティング）できる感度を持つものとする。回折格子は光源からの光を分光するために適切な格子間隔の透過型または反射型のものを自由に選べるとする。それらとレンズや反射鏡，減光フィルターなどの光学素子を組み合わせて，光が波動性と粒子性を持つことを実証する実験装置を製作する。以下の問いに答えよ。

(a) このような実験装置を考案し，装置全体とそれを構成する各部の配置がわかるように図示し，光の波動性と粒子性をどのように実証するのか説明せよ。

(b) 単色光としてナトリウムが発する波長 589 nm の輝線を用いるとき，格子間隔はどのくらいが適当か，理由をつけて示せ。

6. ウランの同位体の一つである $^{238}$U はアルファ崩壊して $^{234}$Th となる。この過程で放出されるエネルギー 4.3 MeV のアルファ粒子を，半導体検出器を用いて計測する。
$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41$，$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.73$，$\sqrt{\ln 2} \fallingdotseq 0.833$，$\sqrt{\ln 3} \fallingdotseq 1.05$ として，以下の問いに答えよ。

(a) 感度 0.5 V/pC の電荷有感増幅器（プリアンプ）をシリコン半導体検出器に接続し，その出力を計測した。アルファ粒子 1 個が入射したとき，プリアンプの出力波高を求めよ。ただしシリコン中に電子正孔対を一対生成するための平均エネルギーを 3.6 eV とする。

(b) 計測した波高分布は $X = 4.3$ MeV の正規分布 $G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}]$ に従い，その標準偏差は $X$ の 0.5%であった。$G(x)$ の半値全幅（FWHM）は何 MeV か。

(c) 粒子検出器の具体例を一つあげ，以下のキーワードを使って，その原理を説明せよ。
（キーワード：エネルギー分解能，検出効率，信号読み出し）