2018 年　7 月　15 日実施

2019 年度（夏季）
立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程物理学専攻入学試験問題
（物理学）

〔注意〕＊合図があるまでこのページをめくらないこと。

１．配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ。

２．大問は６問。

・理論物理学研究室を第１志望とする場合は大問１～４の４問を解答せよ。

・原子核放射線物理学研究室、または宇宙地球系物理学研究室を第１志望とする場合は、大問１～６のうち、４問を選択して答えよ。

３．大問１問につき解答用紙１枚を用い、解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。

４．解答用紙が４枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。

５．質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。

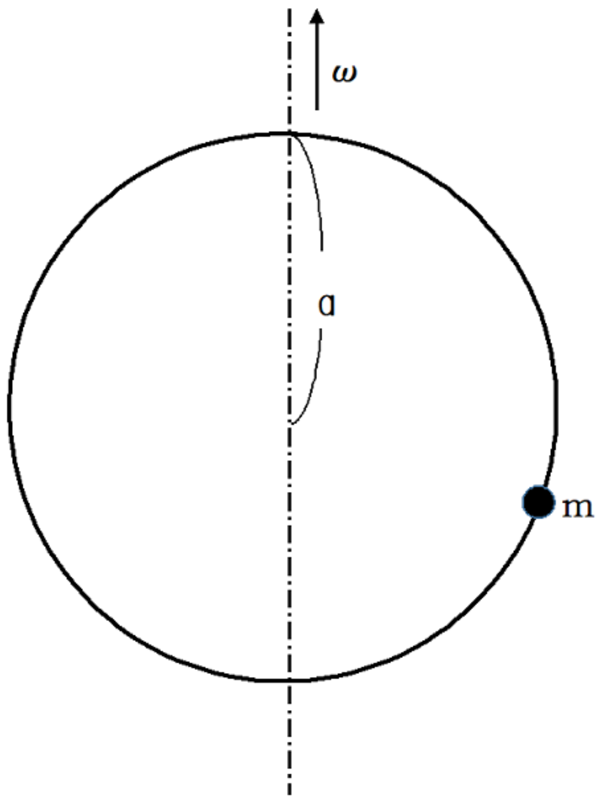
1. 半径 a の円環がその直径を鉛直軸に固定され，軸の周りに一定の角速度 ω で回転している。この円環上になめらかに束縛された質量 m の質点の運動を求めたい。重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ。

(a) 質点の運動方程式を求めよ。

(b) 質点が円環に対して相対的に静止することができる位置をすべて求めよ。

(c) 前項の位置が安定な平衡点かどうか検討し，安定な平衡点については，摂動を与えた時に質点が行う微小振動の振動数を求めよ。

(d) 質点が最下点で接線方向の初速度 v_0 を与えられた時，質点が最上点に到達できるための条件を求めよ。



2. 距離 d を隔てて向かい合わせた半径 a の円板状の平行平板コンデンサーが真空中にある。角周波数 ω の交流電流により，コンデンサーに溜まった電荷が $Q(t) = Q_0 \sin\omega t$ のように時間変化する。ただし，Q_0 は定数とする。電場は極板間のみに発生し一様であるとして良い。真空の誘電率を ε_0，真空の透磁率を μ_0 とする。なお，マクスウェル方程式は，電場 $\boldsymbol{E}$, 磁束密度 $\boldsymbol{B}$, 電荷密度 ρ, 電流密度 $\boldsymbol{j}$ に対して，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0,$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)$$

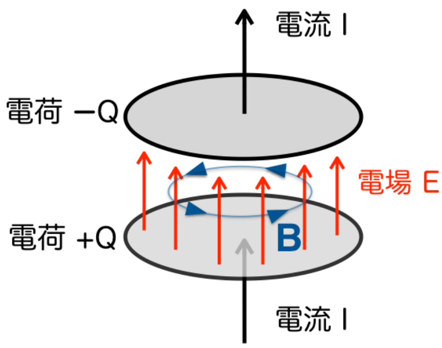
である。以下の問いに答えよ。

(a) 極板間の領域における電場の大きさを求めよ。

(b) 極板間の領域における変位電流密度の大きさを求めよ。

(c) 極板間の領域に蓄えられた電場のエネルギーを求めよ。

(d) 極板間の領域に蓄えられた磁場のエネルギーを求めよ。



3. 質量 m，ばね定数 k の2次元調和振動子を考えよう。そのハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + \frac{k}{2}(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2)$$

である。エネルギー量子の個数演算子 $\hat{N}_1$, $\hat{N}_2$ を用いて，$\hat{H}$ は

$$\hat{H} = \omega(\hat{N}_1 + \hat{N}_2 + 1)$$

と書ける。ただし $\hbar = 1$ の単位系をとる。ここに

$$\hat{N}_1 = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 \hat{x}_1^2 + \frac{1}{\alpha^2}\hat{p}_1^2 - 1\right), \quad \hat{N}_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 \hat{x}_2^2 + \frac{1}{\alpha^2}\hat{p}_2^2 - 1\right)$$

である。$\hat{H}$ の固有状態は $\hat{N}_1$, $\hat{N}_2$ の同時固有状態である。すなわち

$$\hat{H}\Phi_{(n_1,n_2)} = \omega(n_1 + n_2 + 1)\Phi_{(n_1,n_2)}.$$

ここで $\Phi_{(n_1,n_2)}$ は

$$\hat{N}_1\Phi_{(n_1,n_2)} = n_1\Phi_{(n_1,n_2)}, \quad \hat{N}_2\Phi_{(n_1,n_2)} = n_2\Phi_{(n_1,n_2)}$$

を満たす。n_1, n_2 は0以上の整数値 $0, 1, 2, \cdots$ をとる。この2次元調和振動子に対して次の演算子を定義しよう。

$$\begin{aligned}
\hat{A}_1 &= \frac{1}{2}\left(\alpha^2 \hat{x}_1\hat{x}_2 + \frac{1}{\alpha^2}\hat{p}_1\hat{p}_2\right), \\
\hat{A}_2 &= \frac{1}{2}(\hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{x}_2\hat{p}_1), \\
\hat{A}_3 &= \frac{1}{4}\left[\alpha^2(\hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2) + \frac{1}{\alpha^2}(\hat{p}_1^2 - \hat{p}_2^2)\right]
\end{aligned}$$

以下の問いに答えよ。

(a) α および ω を m と k を用いて表せ。

(b) エネルギー $\omega(n+1)$ の状態は何重に縮退しているか。ここで $n = n_1 + n_2$ である。またこの状態で $n' = n_1 - n_2$ はいかなる値をとりうるか？

(c) $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$ は，角運動量の交換関係

$$[\hat{A}_1, \hat{A}_2] = i\hat{A}_3, \quad [\hat{A}_2, \hat{A}_3] = i\hat{A}_1, \quad [\hat{A}_3, \hat{A}_1] = i\hat{A}_2$$

を満たす。この一番目の交換関係が成り立つことを示せ。

(d) $\hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2 + \hat{A}_3^2$ と $\hat{A}_3$ は可換であることを示せ。

(e) $\hat{A}_3$ および $\hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2$ を $\hat{N}_1$, $\hat{N}_2$ を用いて表せ。

(f) $\Phi_{(n_1,n_2)}$ は演算子 $\hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2 + \hat{A}_3^2$ と $\hat{A}_3$ の同時固有状態であることを示せ。そしてそれらの固有値を n と n' を用いて与えよ。

4. 理想気体が吸着面に接する状況を考える。以下の問いに答えよ。

(a) 質量 m の原子 N 個からなる体積 V の古典的な単原子分子理想気体の分配関数を求め，その化学ポテンシャル μ を逆温度 β と原子数密度 $n = N/V$ を用いて表せ。ただし $N \gg 1$ とする。また，以下の公式を使っても良い。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \ \ (\text{ただし } a > 0), \qquad \ln N! \simeq N \ln N - N \ \ (\text{ただし } N \gg 1)$$

(b) 吸着面は N_S 個の吸着点をもつとする。吸着エネルギー，すなわち気体原子が一個吸着されたときのエネルギーの低下は $-\epsilon$ $(\epsilon > 0)$ である。一つの吸着点には一個の原子しか吸着されないとし，また異なる吸着点にある原子間には相互作用はないものとする。吸着原子の数を N_A 個とするとき，吸着原子全体のエントロピーを求め，吸着原子の化学ポテンシャル μ' を逆温度 β と被覆率 $x = N_A/N_S$ で表せ。ただし $N_S \gg 1$，$N_A \gg 1$ とする。

(c) (a) の理想気体が (b) で与えられた吸着面に接していて平衡にあるとき，x を β の関数として表せ。ただし，$N \gg N_S$ とする。

(d) (c) の状況で，x が β についての単調増加関数であることを示し，二つの極限 $\beta \to 0$ と $\beta \to \infty$ での x の振る舞いを求めよ。またその物理的な内容を説明せよ。

5. 1 keV $\sim$ 10 MeV の光子を測定しそのエネルギーを求める際には，次のような機器を組み合わせて使用する。

放射線検出器　(例) シンチレーションカウンター，半導体検出器

信号変換・増幅器　(例) 光電子増倍管，増幅器，波形整形回路

波高分析器　(例) PHA，ADC，MCA

以下の問いに答えよ。

(a) これらを組み合わせて使用する具体例を図示し，各部分の役割について説明せよ。

(b) 各部分での物理過程においてエネルギーの情報がどのように変換・伝達されるか説明せよ。

(c) 得られたエネルギー情報の精度はどのように決まっているか説明せよ。

6. (a) ある放射性物質の壊変率を調べるため，試料を液体シンチレーションカウンターに入れて α 線を計測した。計測された α 線のカウント数が，試料中の放射性物質の壊変数であるとする。バックグラウンド事象は無視できるものとする。10 分間計測したところ，1024 カウントという結果を得た。計測時間に誤差はないものとして，壊変率 (1 分間あたりの壊変数，有効数字 3 桁) とその 1σ 誤差 (68%信頼区間) を求めよ。

(b) 3つの量 x, y, z, t を測定した。それぞれの誤差 $\delta x, \delta y, \delta z, \delta t$ は独立かつランダムであるとする。次の問い i, ii, iii に答えよ。

i. $x = 100 \pm 2$ cm, $y = 50 \pm 2$ cm, $z = 20 \pm 1$ cm であるとき，$F = x - y + z$ は，どのような値と誤差になるか。

ii. $D = xy/t$ で与えられる量 D の誤差 δD を，$x, y, t, \delta x, \delta y, \delta t$ で表わせ。

iii. $x = 100 \pm 2$ cm, $y = 100 \pm 3$ cm, $t = 50 \pm 3$ sec であるとき，$D = xy/t$ は，どのような値と誤差になるか。

(c) 実験で得られた結果が予想した確率分布に従っているのかを判断する手法である，カイ二乗検定について，次の問い i, ii に答えよ。

物理量 x を N 回測定し，$x_1, x_2, \cdots, x_N$ という値が得られた。N は十分に大きいとする。これらの測定値がガウス分布に従ってばらつくことが理論的に予想されているとする。

i. このガウス分布の中心と幅を，測定値の平均値 $\bar{x}$ と標準偏差 σ から推定する。$\bar{x}$ と σ を N と x_i $(i = 1, 2, \cdots, N)$ を用いて表わせ。

次に図のように x の頻度分布 (ヒストグラム) を $n(> 4)$ 個のビン数で作成する。ガウス分布から計算できる k 番目のビンの期待度数 E_k と，実際に観測された度数 O_k のずれ具合から，分布に関する仮説を検定することができる。ある実験結果についてカイ二乗 χ^2 を計算すると，実験ごとにその値は変化するが，平均値は $d = n - 3$ になる。χ^2 の値は仮説検定の指標を与えることができる。

ii. カイ二乗 χ^2 を E_k, O_k を用いて表わせ。