2020 年 2 月 24 日実施

2020 年度（春季）

立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程物理学専攻入学試験問題

（物理学）

〔注意〕＊合図があるまでこのページをめくらないこと.

1. 配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ.
2. 大問は 6 問.
   - ○ 理論物理学研究室を第 1 志望とする場合は大問 1～4 の 4 問を解答せよ.
   - ○ 原子核・放射線物理学研究室，または宇宙地球系物理学研究室を第 1 志望とする場合は，大問 1～6 のうち，4 問を選択して答えよ.
3. 大問 1 問につき解答用紙 1 枚を用い，解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ.
4. 解答用紙が 4 枚配られていることを確認せよ．そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること.
5. 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること.

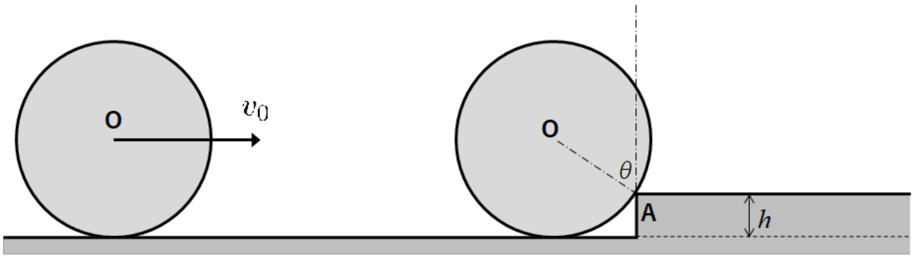
1. 密度が一様で，質量 M，半径 R の球が図のように粗い水平面上を滑らずに転がり，球の中心 O は一定速度 v_0 で直進している．球が高さ h $(0 < h < R)$ の段差に衝突すると，衝突点 A のまわりで滑らずに回転運動を始めた．段の鉛直面は球の進行方向に垂直である．重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ．ただし，球の中心 O を通る軸のまわりの慣性モーメント I が $I = \frac{2}{5}MR^2$ であることを用いてよい．

(a) 衝突の瞬間における A のまわりの球の角運動量の大きさ L, および A のまわりの角速度の大きさ ω を求めよ．

(b) 回転中の $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ と鉛直軸上向きとのなす角度を θ とし，球の回転運動を表す運動方程式を用いて力学的エネルギーの保存を示す式を求めよ．

(c) 回転運動中に球が点 A から受ける抗力の大きさ T を θ, ω を用いて表せ．

(d) 球が段差を越えて進むことができるために v_0 が満たすべき条件を R, h, M, g の式で表せ．



２．陰極線管を用いて電子の質量を求める実験を考える．図１の偏向磁場領域は長さaで磁束密度はB，飛行領域の長さをL，素電荷をe，電子の質量をmとし，陰極線管の内部は真空で，加速電場領域以外での電場の影響は考えなくてよい．以下の問いに答えよ．

(a)　まず，陰極から電子を発生させる前の状態を考える．図１の加速電場を作る陰極と陽極は平行平板コンデンサーであるとみなせる．陰極と陽極の極板面積をS，極板間隔をd，電圧をV，真空中の誘電率をϵ_0とする．図１のスイッチが切られていた状態から，スイッチを入れて十分時間が経った．その間に陰極に蓄積された電子の数n_0を求めよ．ただし，dは小さいとみなしてよい．

(b)　前問で，次いで電源のスイッチを切った．抵抗をRとして，スイッチを切ってから電子の数がn_0の$1/2$になるまでの時間を求めよ．

(c)　再びスイッチを入れる．図１の陰極から電子を発生させ，静電場で加速した後に偏向磁場に通す．そして図１の蛍光板上での変位δを計測した．偏向磁場は一様で偏向磁場領域の中だけにあり，電子の速度vは既知として偏向磁場領域内での電子の軌道の曲率半径ρを式で表せ．次いで、e, B, a, L, m, vを用いてδを表わせ．ただし，磁場による偏向角はわずかで，$\delta \ll L$，及び$a \ll L$として近似してよい．

(d)　次に同じ装置で図２の様に偏向磁場をゼロにし，蛍光板の位置に収集電極を設置してその上に陰極線を一定時間，照射した．収集電極は絶縁されており，また，断熱されているため，収集電極上には電荷と熱が蓄積される．　電子の速度vは既知として，収集電極に蓄積された熱量Hと電荷Qの比H/Qを求めよ．

(e)　(c)の結果と，(d)の結果からvを消去し，δ, H, Q, B, a, Lを用いて電子質量m_eと素電荷eの比m_e/eを表せ．

(f)　別の実験から素電荷eの値が求められたものとする。これと前問の結果，および下記の実験結果を用いて，Hを使わずに電子質量m_eを表せ．

(c)の実験：設定値 a, L, B の条件の実験で，δが計測された． (d)の実験：陰極線を照射した前後で，収集電極の温度はΔT上昇した．収集電極は質量Mの銅の板で，室温近辺において銅の比熱は一定値γであり，電極全体が等温であると考えてよい．また，照射前に０であった収集電極に蓄積された電荷は，照射後に計測した結果，Qであった．

(g) 前問の結果，電子質量は$m_{\mathrm{e}} = 9 \times 10^{-31}$ kgと実測された．電子の速さが光速の10%になるのは，加速電圧が何Vの時か．途中計算を含め有効数字1桁で求めよ．必要であれば以下を用いてよい．

$\sqrt{2} \cong 1.4, \sqrt{3} \cong 1.7, \sqrt{5} \cong 2.2, \sqrt{7} \cong 2.6, \sqrt{11} \cong 3.3$

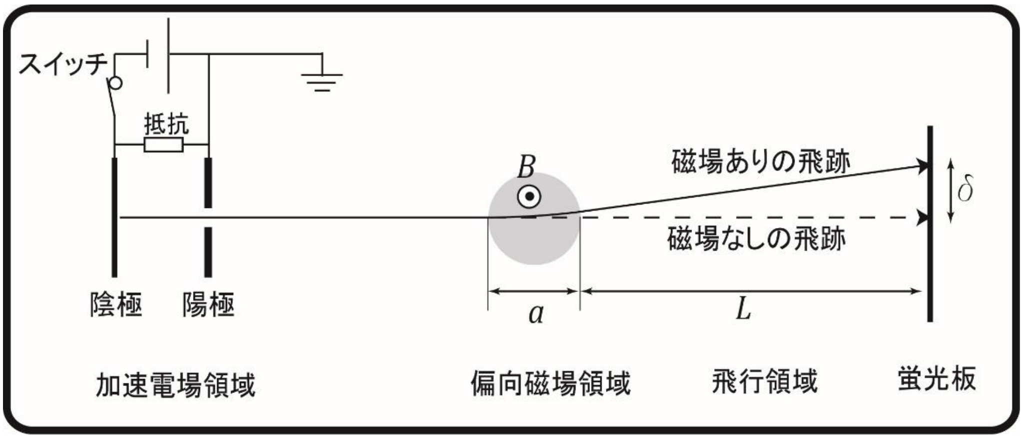


図1

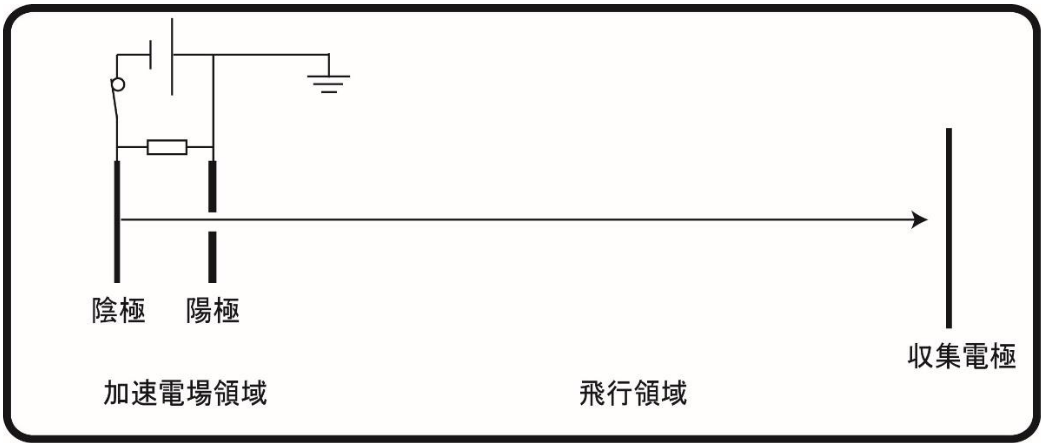


図2

3. 図のように1次元調和振動子のポテンシャル $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ 中の質量 m の粒子の量子力学を考える．この場合，$\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$ として $\xi = \alpha x$ とおくと，Hamiltonian は

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2\right)$$

と書くことができ，エネルギー固有関数は

$$u_n(x) = N_n H_n(\xi) e^{-\xi^2/2} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

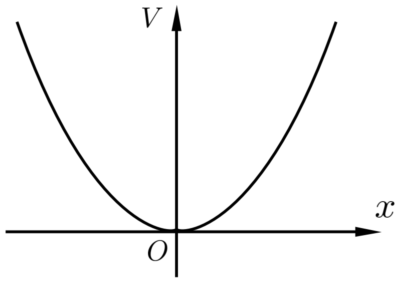
で与えられる．ここで $H_n(\xi)$ は Hermite 多項式，N_n は規格化因子であり，それぞれ

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}, \quad N_n = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}}$$

で与えられる．以下の問いに答えよ．ただし，j を非負の整数として

$$\int_0^\infty u_1(x) u_{2j}(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{2}\right)^j \frac{\sqrt{(2j)!}}{(2j-1)j!}$$

が成り立つことを用いてよい．



(a) $n = 0$ および $n = 1$ のとき $u_n(x)$ がエネルギー固有関数であることを確かめ，そのエネルギー固有値を求めよ．ただし規格化定数は問わない．

(b) 次に，$x = 0$ に粒子が透過できない壁を置き，粒子は $x > 0$ の領域にしか存在できないようにする．この場合の粒子の最低エネルギー状態のエネルギー固有値と波動関数 $\psi(x)$ を求めよ．ただし波動関数は $x > 0$ の領域で規格化すること．

(c) (b) で求めた波動関数を壁がない場合のエネルギー固有関数 u_n で

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$$

と展開したときの展開係数 c_n を求めよ．

(d) 今度は，最初 $t < 0$ のとき，$x = 0$ に壁があり粒子は $x > 0$ の領域に制限された条件下での最低エネルギー状態にあったとし，その後 $t = 0$ で壁を取り除いたとする．$t \geq 0$ で $x < 0$ の領域に粒子が存在する確率 $p_-(t)$ を求めよ．さらに $p_-(t)$ はどのような時間変化をするか調べるため、$p_-(t)$ を適当に近似してその概形を書け．

4. p, T, V, U, S を，それぞれある物質の圧力，温度，体積，内部エネルギー，エントロピーとする．以下の問いに答えよ．

(a) 状態方程式の形によらず，一般に

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = -p + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

が成り立つことを示せ．

(b) いまこの物質の状態方程式が $pV = \alpha U(T, V)$ という形で与えられるとする．(a) で示された関係式を用いて，

$$\begin{aligned} U &= V^{-\alpha} A(TV^{\alpha}) \\ S &= B(TV^{\alpha}) \end{aligned}$$

を導け．ただし A は任意関数であり，B は $xB'(x) = A'(x)$ を満たす関数である．

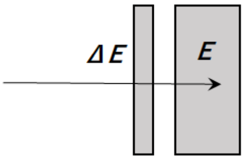
(c) (b) においてエネルギー密度 $u = U/V$ が温度のみに依存するとき，

$$u = CT^{(\alpha+1)/\alpha}$$

となることを示せ．ただし C は定数である．

(d) Bose-Einstein 凝縮した理想 Bose 気体は (c) の性質を満たしていることを示せ．さらにこの場合の α を求めよ．

5. 電荷をもつ放射線粒子の種類 (質量、電荷) を識別するためにカウンターテレスコープ法が使われる．これは下図のように，荷電粒子を厚さ Δx の薄い検出器を通過したのちに厚い検出器で停止させるものである．



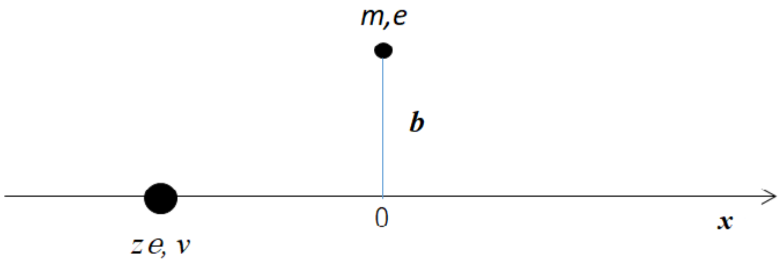
検出器が測定したエネルギーをそれぞれ $\Delta E, E$ とするとき，ΔE は $\Delta E \cong |\frac{dE}{dx}|\Delta x$ と書け，エネルギー損失 $\frac{dE}{dx}$ は $-\frac{dE}{dx} = \frac{z^2e^4}{4\pi\epsilon_0^2 mv^2}\frac{Z}{A}\rho\ln\frac{2mv^2}{I}$ でよく近似できることが知られている．
ここで e は素電荷，ϵ_0 は真空の誘電率である．また，m は電子の質量，ze, E, v は荷電粒子の電荷，運動エネルギー，速度であり，ρ, Z, A, I は検出器の物質の密度，原子番号，原子量，電離エネルギーである．

これに関して以下の問い (a)〜(c) に答えよ．

(a) $E, \Delta E$ の情報から荷電粒子の質量、電荷を知るにはどうすればよいか．説明せよ．

(b) 次の文章の空所 (i)〜(iii) それぞれに入る適切な式を答えよ．

荷電粒子のエネルギー損失は主に物質中の電子との衝突による．これは $\frac{dE}{dx}$ が (i) に比例することからもわかる．そこで荷電粒子と一つの電子との衝突を下図のような簡単なモデルで考えよう．電子の近くを荷電粒子が通過したとする．クーロン力により電子と荷電粒子は互いに運動量をやり取りするが，荷電粒子は重いので軌道の変化は小さく，速度 v の直線運動をしていると近似してよいものとする．また，電子は原子内に束縛され，動かないとしてよい．



荷電粒子の通過により電子が受ける運動量の大きさ p は力積により計算できる．荷電粒子の軌道となる直線を x 軸にとり，最近接の位置を原点として $t = 0$ に通過したとする．電子と荷電粒子の最近接距離を b とする．対称性から荷電粒子の進行方向に垂直の成分 $F_\perp$ のみを考えればよいので，力積は $p = \int_{-\infty}^{\infty} F_\perp dt$ で求められ，結果を m, z, v, b を用いて表すと $p =$ (ii) となる．

電子が受け取るエネルギー ε が電離エネルギー I を超えると，原子に束縛されている電子は電離し，荷電粒子のエネルギー損失が起きる．この電離を起こす b の値には上限があり，これを b_{max} とする．一方，電離電子の速度は荷電粒子の速度を超えることはないので，b には下限があり，これを b_{min} とする．そこで，荷電粒子のエネルギー損失は $\int_{b_{min}}^{b_{max}} \varepsilon\ 2\pi b db =$ (iii) となり $\frac{z^2}{v^2}$ に比例している．

(c) 荷電粒子の単位長さ当たりのエネルギー損失が，エネルギーが低いほど大きくなる理由を物理的に説明せよ．

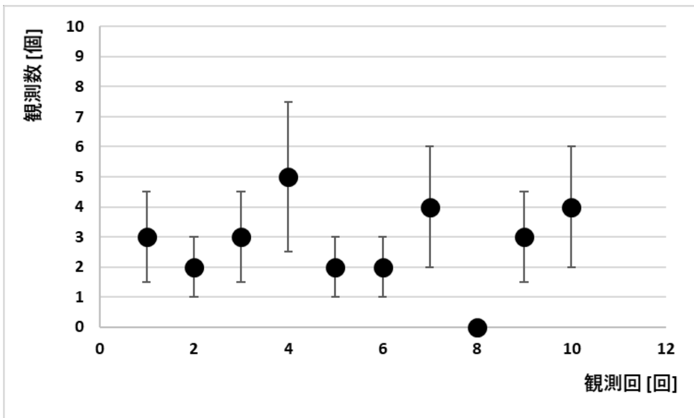
６．実験データの誤差に関する，以下の問いに答えよ．

(a) ある物体にはたらく重力$F = mg$を計測し，重力加速度gの値を求める実験を行った．Fの誤差をσ_F，別途計測したこの物体の質量mの誤差をσ_mとして，重力加速度の誤差σ_gを求めよ．

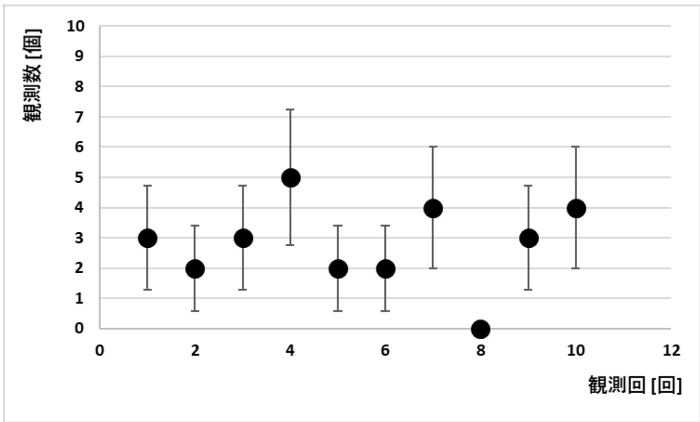
(b) 一定時間Tの間に観測される宇宙線の数Nを数えた．宇宙線の観測数がポアソン分布に従うものとして，宇宙線の単位時間当たりの飛来頻度N/Tの期待値の統計誤差を推定せよ．ただし，Tの誤差は無視してよく，Nは十分大きいものとする．

(c) (b)で，観測機器が検出する信号N_{total}には，宇宙線によるものN_0の他に，宇宙線由来ではないバックグラウンドN_{BG}が含まれていることがわかった．バックグラウンドの観測数もポアソン分布に従うものとし，正味の宇宙線の計数N_0の統計誤差σ_0の推定値を，測定値N_{total}とバックグラウンドN_{BG}で表せ．但し，N_{total}, N_0, N_{BG} は十分大きいものとする．

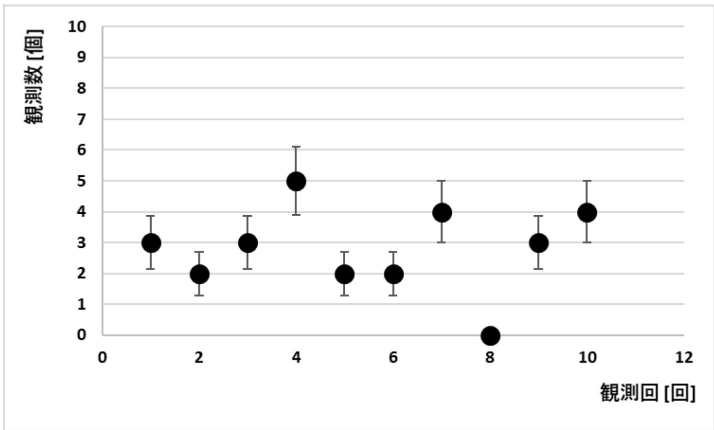
(d) (c)のバックグラウンドの測定を，10 回に分割して行った．バックグラウンドの計数値を示す観測結果の例を，次の①から④までの図の様に統計誤差付きのグラフで表した．これらの中で誤差の評価が最も適切と思われるものを一つ選べ．また，その理由を述べよ．ここで，誤差棒は 68.3%信頼区間を示すものとする．



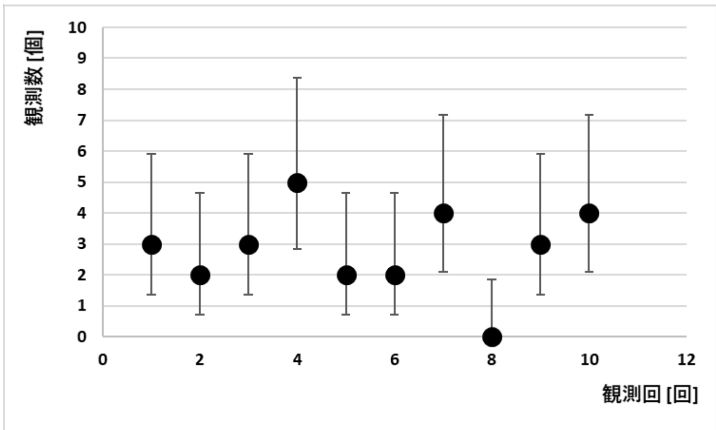
①


観測数 [個]
観測回 [回]
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 2 4 6 8 10 12

②


観測数 [個]
観測回 [回]
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 2 4 6 8 10 12

③


観測数 [個]
観測回 [回]
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 2 4 6 8 10 12

④