2019 年 7 月 14 日実施

2020 年度（夏季）

立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程物理学専攻入学試験問題

（物理学）

〔注意〕＊合図があるまでこのページをめくらないこと．

1. 配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ．
2. 大問は 6 問．
   - ○ 理論物理学研究室を第 1 志望とする場合は大問 1〜4 の 4 問を解答せよ．
   - ○ 原子核・放射線物理学研究室，または宇宙地球系物理学研究室を第 1 志望とする場合は，大問 1〜6 のうち，4 問を選択して答えよ．
3. 大問 1 問につき解答用紙 1 枚を用い，解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ．
4. 解答用紙が 4 枚配られていることを確認せよ．そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること．
5. 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること．

１．一様重力場中に置かれた半径Rの滑らかな球面の頂上に質量mの質点がある．この質点を速さv_0で水平方向に初速度を与えて打ち出すとき，以下の問いに答えよ．なお，重力加速度の大きさをgとする．

(a) 質点が球面から離れずに滑っているとき，その速さvをθで表せ．但し，θは質点と球の中心を結ぶ直線が鉛直上方となす角度とする（$0 \leq \theta \leq \pi/2$）．

(b) (a)で球面が質点に及ぼす垂直抗力の大きさNをθを使って表せ．

(c) 質点が球面を離れるときの$\cos\theta$を求めよ．

(d) v_0がある値より大きいと，質点は球面上を滑らず，球面の頂上から直ちに球面を離れる．その値を求めよ．

２．磁荷が単体で存在する「磁気単極子」の存在を認めた時，マクスウェル方程式は電荷密度ρ_e，磁荷密度ρ_m，電流密度$\vec{j}_e$，磁流密度$\vec{j}_m$を用いて

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \quad \ldots (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \rho_m \quad \ldots (2)$$

$$-\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{j}_m \quad \ldots (3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_e \quad \ldots (4)$$

と拡張された形で表現できる．

以下，全て真空中（$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$，$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$）であり，静的な場だけを考えるものとして，以下の問いに答えよ．

(a) 静止した点電荷q_eが，距離r離れた点に作る電場$\vec{E}$の大きさEを求め，その向きを図示せよ．

(b) 静止した点磁荷q_mが，距離r離れた点に作る磁場$\vec{H}$の大きさHを求め，その向きを図示せよ．

(c) 無限に長い直線上を流れる定常磁流I_mがある場合，直線から距離r離れた点に作られる電場$\vec{E}$の大きさEを求め，その向きを図示せよ．

(d) 無限に長い直線上に一様に磁荷が分布している．磁荷の線密度をλ_mとし，直線から距離r離れた点に作られる磁場$\vec{H}$の大きさHを求め，その向きを図示せよ．

次いで，(1)を 3 次元空間から等方的なn次元空間である場合に拡張して考える（nは$n \geq 2$の任意の自然数）．

(e) 静止した点電荷q_eが，n次元空間で距離r離れた点に作る電場$\vec{E}$の大きさEを求めよ．

(f) 無限に長い直線上に一様に電荷が分布している．電荷の線密度をλ_eとし，n次元空間で直線から距離r離れた点に作られる電場$\vec{E}$の大きさEを求めよ．

ただし，n次元空間における半径rの球の体積V_nがガンマ関数$\Gamma(x)$を用いて

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} r^n$$

で与えられることを利用し，解答をガンマ関数で表してよい．尚，ガンマ関数は以下の性質を満たすことが知られている．

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}, \ \Gamma(1) = 1, \ \Gamma(1+x) = x\Gamma(x) \quad （x\text{が正の実数のとき}）$$

３．電磁場中で運動する質量m，電荷$q(q>0)$のスピンを持たない荷電粒子のハミルトン演算子$\hat{H}$を直交座標系（位置座標の成分は（(x,y,z)））で

$$\hat{H}=\frac{1}{2m}\left(\hat{\Pi}_x^2+\hat{\Pi}_y^2+\hat{\Pi}_z^2\right)+q\varphi$$

と書くことにする. 演算子$\hat{\Pi}_x,\hat{\Pi}_y,\hat{\Pi}_z$は粒子の運動量演算子の成分 $\hat{p}_x,\hat{p}_y,\hat{p}_z$ とベクトルポテンシャル$\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)$の成分を用いて，$\hat{\Pi}_i=\hat{p}_i-\frac{q}{c}A_i \quad (i=x,y,z)$と表される．ここで，$\varphi$はスカラーポテンシャル，$c$は光速である．以下では，磁束密度の大きさを$B$として，$\vec{A}=(0,Bx,0)$，$\varphi=0$ の場合を考える．以下の問いに答えよ．

(a) 交換関係 $[\hat{\Pi}_x,\hat{\Pi}_y]$，$[\hat{\Pi}_y,\hat{\Pi}_z]$，$[\hat{\Pi}_z,\hat{\Pi}_x]$ をそれぞれ求めよ．

(b) 演算子$\hat{\Pi}_x,\hat{\Pi}_y,\hat{\Pi}_z$用いて，$a^\dagger=\alpha\left(i\hat{\Pi}_x+\hat{\Pi}_y\right)$，　$a=\alpha\left(-i\hat{\Pi}_x+\hat{\Pi}_y\right)$と置く．交換関係が$[a,a^\dagger]=1$となる実数の係数$\alpha$を求めよ．ここで，$\alpha>0$とする．

(c) この系のハミルトン演算子$\hat{H}$は，xy平面上での運動に対応する項$\hat{H}_1$とz軸方向の運動に対応する項$\hat{H}_2$に分けることが出来る．(b)で定義した演算子aと$a^\dagger$を用いると，

$\hat{H}_1=\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_C$のように１次元調和振動子のハミルトン演算子と同じ形になることを示し，このときのω_Cを求めよ．ここで，プランク定数をhとして，$\hbar=\frac{h}{2\pi}$である．

(d) この荷電粒子のxy平面上での運動を考え，このときの波動関数を

$$\psi(x,y)=X(x)e^{ip_y y/\hbar}$$

と置く．ここで，p_yは運動量固有値のy軸成分である．$\hat{H}_1$の基底状態に対する規格化された関数$X(x)$を求めよ．なお，波動関数はx軸方向の無限遠で有限であるとし，必要であれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2}\,d\xi=\sqrt{\pi}$$

を使ってもよい.

４．質量mの粒子からなる体積V，温度Tの理想フェルミ気体を考える．以下の問いに答えよ．なお，ボルツマン因子をk_B，プランク定数をh，光速をcとする．

(a) この系の大分配関数Ξの対数$ln\,\Xi$を，運動量 $\vec{p}$を持つフェルミ粒子の相対論的エネルギーから静止エネルギーを差し引いた１粒子のエネルギーϵ，静止エネルギーを含まない化学ポテンシャルμを用いて，$\vec{p}$の大きさpの積分の形で表せ．系の体積Vは十分に大きいとしてよい．縮退度はgとする．

(b) (a)の$ln\,\Xi$を用いて，粒子数Nと圧力Pをpの積分の形で表せ．

(c) 絶対零度 ($T=0$) においてはフェルミ粒子の持ちうる運動量の大きさは有限となる．その上限値をp_fとしてpの積分を実行し，p_fを粒子密度$n=N/V$，縮退度g，プランク定数hを用いて表せ．また，このときp_fと化学ポテンシャルμとの関係を示せ．

(d) $T=0$において，粒子の運動量の大きさpが$p \gg mc$ である場合（相対論的フェルミ気体）の圧力P_Rと，$p \ll mc$ である場合（非相対論的フェルミ気体）の圧力P_{NR}を，それぞれp_f, g, h, c, mの必要なものを用いて表せ．

５．下記の選択肢：A～E から一つを選び，以下の問いに答えよ．解答は選んだ選択肢を明記した上で解答用紙片面一枚にまとめること．

(a) 選択した量を相対精度 10%程度で得るために，検出器やカメラ等のセンサーを含む複数の異なる装置の組み合わせからなる実験装置を考案し，装置の関係を示す全体図を描け．また，それぞれの装置の役割を説明せよ．

(b) (a)のセンサーに関して，その検出の原理と構造を出来るだけ詳しく説明せよ．

(c) その測定における誤差の原因を列挙し，それぞれの抑制方法の考えを述べよ．

選択肢
A：地上における宇宙線の飛来方向の角度．
B：地上における重力加速度．
C：原子核からガンマ線が同時に二つ放出される際の，二つのガンマ線のなす角度．
D：原子からエックス線が同時に二つ放出される際の，二つのエックス線のなす角度．
E：地球から見た太陽の視直径．

６．相対論的な粒子に関する以下の問いに答えよ．以下，光速を c とする．

(a) 地表から $9\ \mathrm{km}$ 上空で鉛直下向きに全エネルギー $1\ \mathrm{GeV}$ のミューオンが生成された．崩壊せずに地上に到達する場合，生成から地上到達までどれだけ時間がかかるか．有効数字１桁で求めよ．なお，ミューオンの質量は $m_\mu \sim 100\ \mathrm{MeV}/c^2$ と近似してよい．

(b) (a)でミューオンが N_0 個生成されたとき，崩壊せずに地上に達するミューオンの割合を有効数字 1 桁で求めよ．なお，静止しているミューオンの寿命を $2\mu s$ とし，指数関数の近似値は図 1 のグラフから読み取ること．

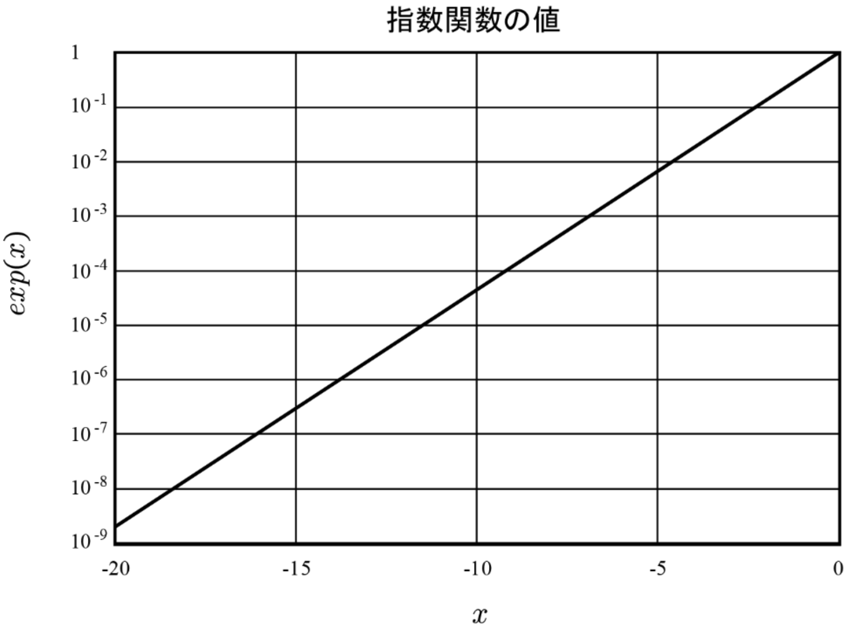

図 1

(c) 質量 m で速さ v の粒子の全エネルギーと運動量の大きさを求めよ． $\beta = v/c, \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ として，β, γ を用いて表してよい．

(d) 実験室に固定された水素標的に陽子を打ち込んで以下の反応で中性パイ中間子生成を行う．

$p + p \longrightarrow \pi^0 + p + p$

生成に必要な陽子の運動エネルギーの最小値を求めよ．ただし，陽子の質量を m_p， 中性パイ中間子の質量を m_{π^0} とする．