2021 年 7 月 18 日実施

2022 年度（夏季）

立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程物理学専攻入学試験問題

（物理学）

〔注意〕＊合図があるまでこのページをめくらないこと．

1. 配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ．
2. 大問は 6 問.
   - ○ 理論物理学研究室を第 1 志望とする場合は大問 1～4 の 4 問を解答せよ．
   - ○ 原子核・放射線物理学研究室，または宇宙地球系物理学研究室を第 1 志望とする場合は，大問 1～6 のうち，4 問を選択して答えよ．
3. 大問 1 問につき解答用紙 1 枚を用い，解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ．
4. 解答用紙が 4 枚配られていることを確認せよ．そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること．
5. 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること．

１．次の 1-3 の設問に答えなさい．ただし，万有引力定数をGとし，物体Oはすべて質点と見なせるものとする．

(a) 質量Mの物体Oの周りを，質量mの物体Aが半径aの円軌道上を速さv_0で運動している．v_0を求めよ．ただし，$M \gg m$とする．

(b) 前問の状況から，質量 m_{B}の物体Bが，物体Aと点Pで弾性衝突した．衝突直前の物体Bは物体Aと逆向きに速さv_{B}で運動しており，この衝突によって，物体Aの運動の向きは変わらなかった．この衝突直後の物体Aの速さv_1を求めよ．

(c) 前問の状況の後に，時間tが経過した時に物体Aは初めて点Pの位置に戻ってきた．この間に物体Aと天体Oが最も近づいた時の距離はbであり，その時の物体Aの速さはv_2であった．この時のv_2とtを，a, b, v_0, v_1 のうち必要なものを用いて求めよ．また，ケプラーの第 3 法則「惑星が太陽の周りを回る周期の 2 乗は，楕円軌道の長半径の 3 乗に比例する」を利用してもよい．

２．マクスウェル方程式は電荷密度ρ，電流密度$\vec{J}$を用いて

$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$　… (1)，$\nabla\cdot\vec{B}=0$　… (2)，$-\nabla\times\vec{E}=\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$　… (3)，$\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{J}$　… (4)

と表現できる．また，誘電率ε，透磁率μの媒質中では $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$，$\vec{B}=\mu\vec{H}$ であるとして，下記の設問に答えよ．

まず，電荷 ρ と電流 $\vec{J}$ が存在しない誘電体中について考える．

(a) ベクトルを$\vec{D}=(D_x,D_y,D_z)$，$\vec{B}=(B_x,B_y,B_z)$，$\vec{E}=(E_x,E_y,E_z)$，$\vec{H}=(H_x,H_y,H_z)$ の様にx,y,z直交空間座標の成分表示で書く時，マクスウェル方程式をこの成分表示で全て書け．

(b) 一様な誘電体（誘電率ε，透磁率μ）中をz軸方向に伝播する平面電磁波を考える．前問で得た式を用いて，電場のx成分E_xの満たす一次元波動方程式を求めよ．

(c) 周波数ω，波数$k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ で振動する電場

$$E_x(z,t)=E_0e^{i(\omega t-kz)}$$

は，前問の波動方程式を満たすことを示せ．

次に，誘電率ε，透磁率μ，電気伝導率σの導電体中をz軸方向に伝播する周波数ωの平面電磁波を考える．この導電体中には Ohm の法則により$\vec{J}=\sigma\vec{E}$の電流が流れ，電荷ρは存在しないものとする．

(d) 誘電率を拡張した，複素誘電率を以下に定義する．

$$\hat{\varepsilon}=\varepsilon-\frac{i\sigma}{\omega}$$

この時，$\hat{k}=\omega\sqrt{\hat{\varepsilon}\mu}$ で波数を複素数に拡張して定義すると，この平面電磁波の電場のx成分が

$$\hat{E}_x(z,t)=\hat{E}_0e^{i(\omega t-\hat{k}z)}$$

のとき，次の波動方程式を満たすことを示せ．ただし，$\hat{E}_0,\omega,\varepsilon,\mu,\sigma$は実数である．

$$(\varepsilon-\frac{i\sigma}{\omega})\mu\frac{\partial^2\hat{E}_x}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\hat{E}_x}{\partial z^2}$$

(e) 前問で，$\hat{k}=\mathrm{Re}(\hat{k})+\mathrm{Im}(\hat{k})i$ と書く．真空中から導体中へ電磁波が侵入すると，表面から内部に入るに従って指数関数的に電場の振幅が減衰する．電場が表面からの距離zに対し減衰する侵入長δを

$$|\hat{E}_x|\propto e^{-\frac{z}{\delta}}$$

と定義するとき，δを求めよ．但し，$\mathrm{Re}(\hat{k})$，$\mathrm{Im}(\hat{k})$を解答に用いてよい．

３．$w(x)$を実関数として以下の形に書くことができるポテンシャルに対する質量mの粒子の１次元ポテンシャル問題を考える．

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(w'^2(x) - w''(x)\right). \tag{3.1}$$

ここで，$'$はxによる微分を表す．例として，$w(x) = (m\omega/2\hbar)x^2$のときに$V(x)$はよく知られた角振動数$\omega$の調和振動子のポテンシャルから定数を引いたものになる．

(a) $\hat{p}$を運動量演算子，$\hat{x}$を位置演算子として，この系のハミルトン演算子 $\hat{H}$は，一般にある適切な実関数$f(x)$を用いて

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p} + i\,f(\hat{x})\right)\left(\hat{p} - i\,f(\hat{x})\right) \tag{3.2}$$

という形に書くことができる．$f(x)$を具体的に求めることでこのことを示せ．このことから, この系のエネルギー固有値E_n $(n = 0,1,\cdots)$は非負であることがわかる. 以下では, $E_0 \le E_1 \le E_2 \le \cdots$とする.

(b) エネルギー固有値$E_0 = 0$の束縛状態が存在する場合を考える．この基底状態の波動関数$\psi_0(x)$を求めよ．ただし，規格化定数は問わない.

(c) ポテンシャル$V(x)$が

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{ma^2\cosh^2(x/a)} + \frac{\hbar^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\left(\tanh^2(x/a) - \frac{1}{\cosh^2(x/a)}\right) \tag{3.3}$$

(aは定数)のとき，対応する$w(x)$を求めよ．また，その結果を利用して，ポテンシャルが

$$U(x) = -\frac{\hbar^2}{ma^2\cosh^2(x/a)} \tag{3.4}$$

で与えられるときに基底状態のエネルギー固有値と波動関数を求めよ．ただし，規格化定数は問わない.

(d) (3.1)と「対」になるポテンシャル

$$\tilde{V}(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(w'^2(x) + w''(x)\right) \tag{3.5}$$

を考える．この「対」になる系の束縛状態のエネルギースペクトル $\tilde{E}_m$は$\tilde{E}_m = E_0(= 0)$となるものが存在しないことを除いて束縛状態のE_nと一致する，すなわち，$\tilde{E}_0 = E_1, \tilde{E}_1 = E_2, \cdots$となることを示せ.

(e) ポテンシャル(3.3)と「対」になるポテンシャル $\tilde{V}(x)$を求め，(4)の結果を利用することで，ポテンシャルが(3.4)で与えられるときの束縛状態の個数を求めよ.

４．理想フェルミ気体の温度T，体積V，粒子数Nの熱平衡状態を考える．ボルツマン定数をk_Bとする．

(a) 特殊相対論を考慮すると，1 粒子のエネルギーϵと運動量$\vec{p}$の間には，mを粒子の質量，cを光速として

$$\epsilon(\vec{p}) = \sqrt{c^2|\vec{p}|^2 + m^2c^4} \tag{4.1}$$

という関係があることがわかる．このときに 1 粒子の状態密度$D(\epsilon)$を計算せよ．ただし，スピンの縮退度は考慮しなくてよい．また，$D(\epsilon)$が$|\vec{p}| \ll mc$（非相対論的極限）と$|\vec{p}| \gg mc$（相対論的極限)でどのようにふるまうか述べ，$D(\epsilon)$の概形をϵの全域で図示せよ．

以下では，1 粒子の状態密度が

$$D(\epsilon) = b\,V\,\epsilon^a \quad (\epsilon \geq 0), \quad D(\epsilon) = 0 \quad (\epsilon < 0) \tag{4.2}$$

と表される場合を考える．$b > 0$とaは定数である．

(b) $a = 0$の場合に，フェルミエネルギーϵ_Fを数密度$n = (N/V)$を用いて表せ．

(c) $a = 0$の場合に，化学ポテンシャルμをTとnの関数として表せ．

(d) 一般のaの場合に，$T = 0$のときの体積あたりのエネルギーρをnの関数として表せ．

(e) (d)のとき，圧力Pはρに比例することがわかる．その比例係数をaを用いて表せ(結果は$T = 0$に限らず正しい)．

５． A 群に与えられた粒子・光子群(a)-(g)から 1 つを選び，その粒子の運動エネルギーまたは光子のエネルギーを相対的なエネルギー分解能 10%以下($\Delta E/E \leq 0.1$)程度で計測する方法について，B 群のキーワードから適当なもの（複数選択可）を用いて，解答用紙一枚に収まる様に測定原理を説明し，測定手法を具体的に記述せよ．図を用いても良い．ここで，粒子あるいは光子は開口部直径 1mm の発生源から半角 10 度の円錐状に放射されているものとする．

A 群
(a) 500keV のガンマ線，(b) 5keV の X 線，(c) 500nm の可視光，(d) 5 μmの赤外線，
(e) 10eV の電子，(f) 100eV の He イオン，(g) 5MeV の α 線

B 群
回折格子，静電型エネルギー分析器，飛行時間法，シンチレーター，電離箱，半導体検出器

６．誤差に関する，以下の問いに答えよ． ただし，偶然誤差はガウス分布に従い，その大きさは 68.3%信頼区間を示すものとする．

(a) ある金属棒の長さを物差しで計測した．以下の誤差の要因はそれぞれ，偶然誤差と系統誤差のいずれと考えるべきか，それぞれ理由をつけて説明せよ．

A. 目盛読み取りの角度による視差.

B. 金属棒の熱膨張.

C. 物差しの目盛のずれ.

D. 最小目盛の 1/10 まで読み取る時の，数値の最小桁の不確かさ．

(b) ある工場で製造した前問の金属棒 N本に対し長さL_i （$i = 1, \dots, N$は金属棒の番号）を計測した際の偶然誤差を考える．この大きさがiによらず同じ値σだとする時，σの推定値として相応しい量をL_iを用いた式で表せ．測定値L_iの平均値を$\bar{L}$とする。

(c) $\bar{L}$の偶然誤差（標準誤差）の大きさ$\sigma(\bar{L})$を，L_iを用いた式で表せ.

(d) 前問の$\bar{L}$に対して，$y = a\,\bar{L}^{\,2} + b$で定義されるある量yの偶然誤差$\sigma(y)$を表せ．ただし，a, bは定数である．また，前問の$\sigma(\bar{L})$を用いて表してよい.

(e) 稀にある確率pで検査基準を満たさない不良品が発生する製品がある．実際に製品を検査して不良品の個数を数えることで，pを推定することを考える．このとき多数の不良品を数える程，推定の精度は高まるが，pを相対精度 10%で評価するには，不良品が最低何本見つかるまで検査をする必要があるか．ただし，不良品の発生数はポアソン分布に従うと考えてよい.