

2024 年 7 月 14 日実施

2025 年度
理学研究科物理学専攻博士課程前期課程
入学試験問題（物理学）

[注意] 合図があるまでこのページをめくらないこと。

- 解答用紙 4 枚とグラフ用紙 1 枚の束、定規 1 個が配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。
- 配られた全ての解答用紙とグラフ用紙に受験番号を記入せよ。
- 大問は 6 問。
 - ・大問 1 ～ 6 のうち、4 問を選択して解答せよ。なお、第 1，第 2 志望に関わらず理論物理学研究室を志望する場合は、大問 1 ～ 4 の 4 問を解答せよ。
- 大問 1 問につき解答用紙 1 枚を用い、解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。たとえば問 1 を選択した場合には、「1」ではなく「問 1」と記入すること。選択した大問の番号が不明確な場合は、採点対象にしない。
- グラフ用紙は大問 5 用である。大問 5 を選択するかどうかにかかわらず、受験番号を記入すること。大問 5 を選択しない場合は、受験番号以外は記入しないこと。また、記入してしまったのち大問 5 を選択から除く場合は、グラフ用紙全体に大きく×を書き、「大問 5 は選択しない」等の文言を書いて、選択をしていないことが明確になるようにすること。
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。

1. 重力と抵抗の無視できる宇宙空間で速さ V_0 で等速直線運動しているロケットが、時刻 $t = 0$ から燃料を噴出することによって加速を始めた。時刻 t ($t \geq 0$) におけるロケットの質量とロケットの進行方向を正とした速さを、それぞれ $M(t), V(t)$ とする。燃料は、ロケットに対して一定の速さ v でロケットの進行方向と逆方向に 1 秒あたり一定の質量 $\alpha = -\frac{dM}{dt}$ ($\alpha > 0$) を噴出している。考えている時間内には燃料は尽きないものとして、以下の問いに答えよ。
- (a) 時刻 t から $t + \Delta t$ ($\Delta t \ll 1$) の間にロケットから放出された燃料の質量を $\alpha, \Delta t$ を用いて表せ。
- (b) ロケットの運動量の変化率 $\frac{dP(t)}{dt}$ は噴出した燃料の運動量の変化率と大きさが等しいことを使って、 $\frac{dP(t)}{dt}$ を $V(t), v, \alpha$ を用いて表せ。
- (c) $\frac{dV}{dt}$ を t, α, v, M_0 を用いて書け。ただし、 M_0 は $t = 0$ のときのロケット全体の質量である。
- (d) (c) で求めた V に関する微分方程式の解 $V(t)$ を V_0, v, m_0, α, t を用いて表せ。また、 t と $V(t)$ のグラフの概形を書け。

2. 真空中に置かれた導線を通る電流が作る磁場について、以下の問に答えよ。真空の透磁率を μ_0 とする。

- (a) 直線状の導線がある。図1のように、導線に沿って x 軸を定めた3次元の直交座標系をとる。電流 I が x 軸正の向きに流れているとする。この電流の $x=x_0$ 近くの微小な dx の部分だけが、点 $P=(0, \ell, 0)$ に作る磁場の大きさ $|d\vec{B}|$ を、 ℓ , x_0 , I , dx , μ_0 を使って記述せよ。向きも述べよ。

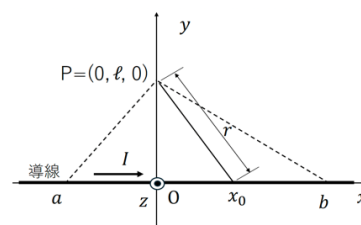


図1

- (b) 図1の場合で、 x 軸上を無限に長く電流が流れている場合、点 P での磁場の大きさ $|\vec{B}_1|$ を求めよ。
- (c) 図1の場合で、 x 軸上の $x=a$ から $x=b$ までの電流が点 P に作る磁場の大きさ $|\vec{B}_2|$ を求めよ。ただし、 $a < b$ とする。

- (d) 図2のように定めた3次元の直交座標系の $x-y$ 平面上に、1辺の長さが $2L$ の正三角形の辺を成すような導線を重心が原点 O になるように置いた。電流 I が図の向きに流れている。原点 O にできる磁場の大きさ $|\vec{B}_3|$ と向きを求めよ。ただし、この小問以降で、多角形の角があることで生じる効果は無視できるとする。

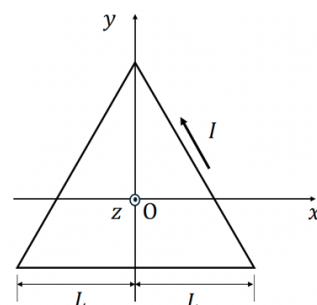


図2

- (e) 図3のように、半径 r の円に内接する正 n 角形の辺を成す回路に電流 I が流れている。1辺が円の中心に対して張る角度の半分 θ は π/n であることに注意して、円の中心にできる磁場の大きさ $|\vec{B}_4|$ を求めよ。

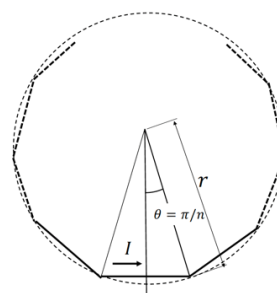


図3

(参考) 必要があれば、以下の公式を用いて良い。

$$\int \frac{\ell^2}{(x^2 + \ell^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{(x^2 + \ell^2)^{1/2}} + C \quad C \text{ は積分定数}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\pi} \tan \left(\frac{\pi}{n} \right) \right) = 1$$

3. 時間に依存する 2 準位系ハミルトニアン

$$\hat{H}(t) = \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 & \lambda e^{i\omega t} \\ \lambda e^{-i\omega t} & \hbar\omega_1 \end{pmatrix}$$

で記述される系を考える。ここで $\hbar$ は換算プランク定数、 λ は実数、 $\omega, \omega_0, \omega_1$ は正の定数で $\omega_0 < \omega_1$ とする。この系の状態 $|\psi(t)\rangle$ の時間発展はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle$$

に従うとする。以下の問に答えよ。

(a) ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) &= \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1(t), \\ \hat{H}_0 &= \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 & 0 \\ 0 & \hbar\omega_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{H}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表すことができる。時間に依存しない $\hat{H}_0$ に対する時間発展演算子

$$\hat{U}_0(t) = \exp\left(-\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}\right)$$

を $t, \hbar, \omega_0, \omega_1$ の中から必要なものを用いて、2 次の正方行列の形で表せ。ここで演算子 $\hat{X}$ の指数関数 $\exp(\hat{X})$ は

$$\exp(\hat{X}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{X}^n}{n!}$$

で定義される。

(b) $|\psi(t)\rangle = \hat{U}_0(t) |\Psi(t)\rangle$ と変換すると、新たな状態 $|\Psi(t)\rangle$ はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \lambda \hat{H}_{\text{new}}(t) |\Psi(t)\rangle$$

を満たす。 $\Omega = \omega + \omega_0 - \omega_1$ とするとき、新たなハミルトニアン $\hat{H}_{\text{new}}(t)$ は以下の形で与えられることを示せ。

$$\hat{H}_{\text{new}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\Omega t} \\ e^{-i\Omega t} & 0 \end{pmatrix}$$

(c) 無次元量 $\left| \frac{\lambda}{\hbar\Omega} \right|$ が 1 に比べて十分小さいときには摂動論が使える。 $|\Psi(t)\rangle$ を λ に関して

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi_0(t)\rangle + \lambda |\Psi_1(t)\rangle + O(\lambda^2)$$

と展開するとき、 $|\Psi_0(t)\rangle$ は t に依存しないことを示せ。

(d) $|\Psi_0(t)\rangle$ は t に依存しないので、これを改めて $|\Psi_0\rangle$ と表す。初期状態が

$$|\Psi(0)\rangle = |\Psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるとき、1 次の摂動補正は

$$|\Psi_1(t)\rangle = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

となる。 $\alpha(t), \beta(t)$ を $t, \hbar, \Omega$ の中から必要なものを用いて表せ。

4. 相互作用しないフェルミ粒子が N 個存在する系を考える. 1 粒子のエネルギー準位は無限個あって, それらが

$$\epsilon_j = j\epsilon, \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

で与えられるとする. ただし $\epsilon > 0$ とし, スピン等のエネルギー準位以外の量子数の自由度は考えない. 系が逆温度 β の熱平衡状態にあるとし, 分配関数を Z_N とする.

(a) この系の基底状態のエネルギーを N, ϵ を用いて表せ.

(b) $q = e^{-\beta\epsilon}$ とするとき, 1 粒子分配関数 Z_1 を q で表せ.

(c) 2 粒子分配関数は

$$Z_2 = \frac{q}{P_2(q)}$$

となる. q の多項式 $P_2(q)$ を求めよ.

(d) 低温極限では逆温度 β は大きいので q はゼロに近くなる. このとき分配関数 Z_N は

$$Z_N = q^\alpha(1 + c_1q + c_2q^2 + O(q^3))$$

のように q に関して展開できる. N が 2 以上の整数のとき, 指数 α と係数 c_1, c_2 を求めよ.

5. $y = a \exp(-bx)$ ($a, b > 0$) の関係を満たすと予想されるある物理量 x, y を測定する実験を行なったところ、以下の表のような結果が得られた。 x には誤差はなく、 y には標準偏差を σ_y としてそれぞれ $\pm\sigma_y$ の偶然誤差があるものとする。以下の問に答えよ。

x	1	2	3	4	5
y	51	14	3.5	0.95	0.35
σ_y	10	3	0.8	0.5	0.12

- (a) 配布した片対数グラフ用紙に測定結果をプロットせよ。各測定点には誤差棒もつけること。
- (b) 各測定点の近くを通る最も適当と思われる直線をグラフに描き、 a と b の概数を求めよ。また a と b をどのように求めたのかを記せ。必要であれば $e = 2.72$ を使って良い。
- (c) この測定において、誤差の見積もりが適切かどうかを検討せよ。

6. 図1はシリコン中での1000 eV から5000 eV の X 線の減衰長のグラフである。X 線の減衰長とは、X 線のある物質に入射させたとき、X 線の光子数が入射 X 線の光子数の $1/e$ になる距離である。 e は自然対数の底である。

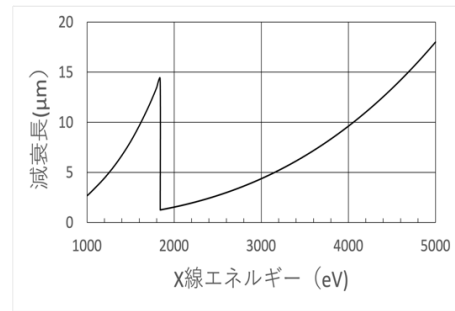


図1.シリコン中での X 線の減衰長

- (a) ある物質でできた厚さ d の薄膜に単色 X 線 N_0 個を膜面に垂直に入射させた。減衰長は λ とする。通り抜ける X 線の数 N を推定せよ。
- (b) 図1に示すように、シリコン中での減衰長は、およそ 1800 eV で急激に変化する。理由を簡潔に説明せよ。
- (c) (a)と同様に、減衰長 λ の単色 X 線 N_0 個を薄膜に垂直入射させると N 個の X 線が通り過ぎたとする。薄膜の厚さ d を推定せよ。
- (d) N_0 には $\sqrt{N_0}$ 、 N には $\sqrt{N}$ の統計誤差があるとする。(c)で求めた d につく統計誤差 δd を誤差の伝播を考えることで求めよ。
- (e) 厚さ d が、ほぼ $10\mu\text{m}$ であることがわかっているシリコン薄膜がある。強度が十分安定している X 線発生装置から放射されるビーム状の 4.1 keV の X 線を使って薄膜の厚さを測定する。厚さの精度 δd を $0.1\mu\text{m}$ 以下にしたい。まず、ビーム状の X 線を直接検出器に当て時間 T の間の X 線の数測定し N_0 とする。次に X 線発生装置と検出器の間にシリコン薄膜をビームに垂直に設置し、同じ時間 T の間透過 X 線の数 N を測定する。 N_0 として必要な数を定量的に議論せよ。ただし自然対数の底 e は 2.72 とする。
- (f) (e)の実験で全測定時間が決まっているとする。その測定時間を、薄膜を透過させた X 線光子数の測定時間と直接検出器に当てて X 線の数測定する時間を $f:(1-f)$ に振り分ける。測定した膜厚の統計誤差を最も小さくする f を求めよ。自然対数の底 e は、数値を代入しなくても良い。