2023 年 7 月 16 日実施

2024 年度(夏季)

立教大学大学院理学研究科博士課程前期課程

物理学専攻入学試験問題

(物理学)

〔注意〕*合図があるまでこのページをめくらないこと.

1. 解答用紙が 4 枚配られていることを確認せよ．そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること.
2. 配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ.
3. 大問は 6 問.
   - 理論物理学研究室を第 1 志望とする場合は大問 1 から 4 の 4 問を解答せよ.
   - 原子核・放射線物理学研究室，または宇宙地球系物理学研究室を第 1 志望とする場合は，大問 1 から 6 のうち，4 問を選択して解答せよ.
4. 大問 1 問につき解答用紙 1 枚を用い，解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ．たとえば問 1 の場合には，「1」ではなく「問 1」と記入すること.
5. 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること.

1． 質量 m，長さ l の細い棒の運動を考える．棒の密度，太さ，表面の粗さは一様であり，長軸回りの回転運動はしないものとし，重力加速度を g，空気抵抗は無視して以下の設問に答えよ．

図１の様に，一様に粗い水平面（xy平面）の上で棒を y 方向に初速度 v_0 で滑らせた所，棒は向きを変えずに y 方向に等加速度直線運動を行い，発射してから停止するまでにかかった時間は T_1 であった．

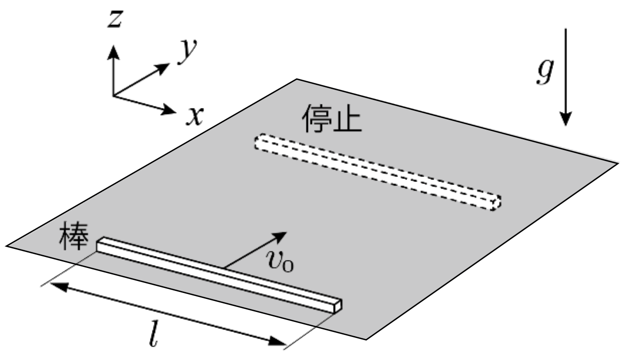


図 1

(a) この棒に y 方向にはたらく，棒の x 方向の単位長さあたりの，動摩擦力の大きさ f を求めよ．ただし，f は速度に依存せず一定である．

(b) 次に図２の様に，はじめ静止していた棒をこの水平面上で重心の回りに自転させる．棒の重心回りの慣性モーメント I を求めよ．また，初期条件として角速度が ω_0 だとして，前問と同じ動摩擦力によって回転が停止するまでの時間を，I, f を用いて表せ．棒の太さと回転中心での摩擦は考えなくてよい．

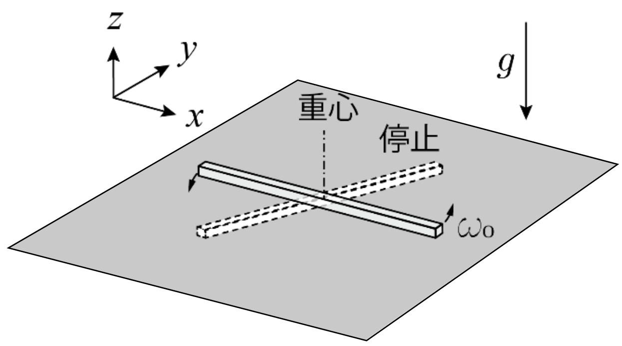


図 2

次に図 3 の様にこの棒を，同じ長さ L の糸 2 本で吊るして静止させる．はじめ 2 本の糸は鉛直方向に平行に張っており，棒の重心を通る鉛直軸 P からの距離はともに $a/2$ である．

糸の上端と下端は自由に回転できる支点でそれぞれ天井と棒に固定されている。上端の 2 つの固定支点の y 座標, z 座標は同じである．この時の P の回りの棒の軸方向の角度を図の $\theta = 0$ とする．以下で糸は軽くて細く，伸びずに常に張った状態であるものとする．

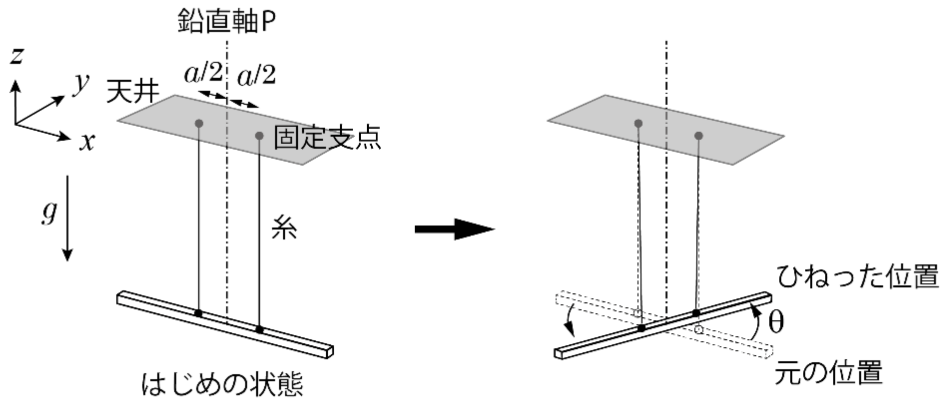


図 3

(c) 棒を持ち，棒の重心を P の上に保ったまま，P の回りに微小角 θ の位置まで静かにひねる．この間に，棒の重力による位置エネルギーが増加する量 U を， θ の 2 次までの近似で求めよ．

(d) 前問の時，棒には P の回りのトルクがかかる．この時のトルクの鉛直成分 τ を， θ，U を用いて表せ．ただし，鉛直方向上向きを τ の正の向きとせよ．

(e) 角度 $\theta = \theta_0$ まで棒をひねった状態で，時刻 $t = 0$ の時に静かに手を離した。その後，棒は角度 θ が変わる運動をした。棒の重心は常に P 上にあったままだった。(c)で求めた U の具体的な式と， I を用いて棒の運動方程式を書け。また， t の関数 $\theta(t)$ としてその解を求めよ．

2. 図 1 の様に，透磁率 μ の物質でできた物体（内半径 r_0，外半径 r_0+b，厚さ a の穴あきの円板）にコイル状に N 回導線を巻く．導線には一定電流 I が流れているとする．磁場は物体外部にもれ出ないものとする．以下の設問に答えよ．

(a) 物体内で，円板中心からの半径 rにおける磁束密度の大きさ $B(r)$ を求めよ．また，向きを図で示せ．

(b) 物体内の磁場のエネルギー U を求めよ．

(c) 物体の自己インダクタンス L を求めよ．

(d) $b \ll r_0$ の時，自己インダクタンス L は ab に比例することを示せ．

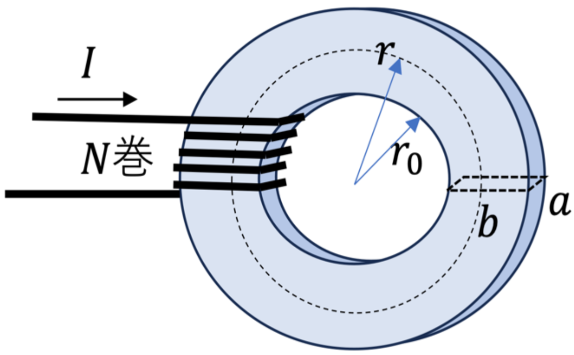


図 1

3. 次の Hamiltonian に従うスピン 1/2 の粒子の 1 次元運動の量子力学を考える．ただし $-\infty < x < \infty$ である．簡単のため質量 $m = 1$ とする．

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \hat{x}^2) + \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_3.$$

ここで，$\hat{x}$ と $\hat{p}$ は正準交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を満たすとし，Pauli 行列

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

は次の関係を満たす．

$$\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 = -\hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_1 = i\hat{\sigma}_3,\ \hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_3 = -\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_2 = i\hat{\sigma}_1,\ \hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_1 = -\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_3 = i\hat{\sigma}_2.$$

また，演算子 $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \hat{Q}_\pm$ を

$$\begin{aligned} \hat{Q}_1 &= \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_1\hat{p} + \hat{\sigma}_2\hat{x}),\quad \hat{Q}_2 = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_2\hat{p} - \hat{\sigma}_1\hat{x}), \\ \hat{Q}_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q}_1 + i\hat{Q}_2),\quad \hat{Q}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q}_1 - i\hat{Q}_2) \end{aligned}$$

と定義する．以下の設問に答えよ．ただし調和振動子のエネルギー準位は導出なしで用いて良い．

(a) この系のエネルギー準位が $E_n = \hbar n \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$ であることを示せ．また各準位の縮退度（縮重度）を求めよ．

(b) つぎの関係式を証明せよ．

$$\hat{Q}_+^2 = \hat{Q}_-^2 = 0, \quad \hat{H} = 2\hat{Q}_1^2 = 2\hat{Q}_2^2 = \hat{Q}_+\hat{Q}_- + \hat{Q}_-\hat{Q}_+.$$

(c) つぎの関係式を証明せよ．またこの関係式に基づいて演算子 $\hat{Q}_\pm$ の物理的な意味を簡潔に述べよ．

$$\left[\hat{H}, \hat{Q}_\pm\right] = 0, \quad \left[\frac{1}{2}\hat{\sigma}_3, \hat{Q}_\pm\right] = \pm\hat{Q}_\pm \quad (\text{複号同順}).$$

(d) $\hat{H}$ に相互作用項を加え，

$$\hat{H}_1 = \hat{H} + \lambda(\hat{Q}_+ + \hat{Q}_-)$$

とおく．摂動論を用いて，$\hat{H}_1$ のエネルギー準位を λ の一次まで求めよ．ただし，λ は実数であるとする．

4. 一様磁場中に置かれたスピン 1/2 の N 個の粒子が 1 次元状に並んだ系の Hamiltonian が

$$\hat{H} = -J\sum_{i=1}^{N}\hat{s}_i\hat{s}_{i+1} - h\sum_{i=1}^{N}\hat{s}_i$$

で与えられるとする．ここで，$\hat{s}_i$ はスピンが磁場と同じ向きのとき 1 を逆向きのとき -1 の値をとり，周期的境界条件 $\hat{s}_{N+1} = \hat{s}_1$ を満たすとする．また，J, h は正の定数である．β を逆温度として，以下の設問に答えよ．

(a) $N = 2$ のときの分配函数 Z_2 を求めよ．(この場合も $i = 1, 2$ をとることに注意すること．)

(b) 分配函数 Z_N は

$$Z_N = \sum_{s_1=\pm1}\cdots\sum_{s_N=\pm1}\prod_{i=1}^{N}\exp\left[\beta\left(Js_is_{i+1} + h\frac{s_i + s_{i+1}}{2}\right)\right]$$

と書ける．この表式の s_i に依存する部分の $s_i = \pm1$ に関する和が

$$\cdots\cdot\sum_{s_i=\pm1}\exp\left[\beta\left(Js_{i-1}s_i + h\frac{s_{i-1} + s_i}{2}\right)\right]\exp\left[\beta\left(Js_is_{i+1} + h\frac{s_i + s_{i+1}}{2}\right)\right]\cdot\cdots$$

のように書けることから，Z_N は 2 次の実対称行列 V を用いて，

$$Z_N = \mathrm{tr}(V^N)$$

と書くことができる．行列 V の具体形を書け．

(c) 行列 V の固有値 λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \geq \lambda_2)$ を求めよ．また Z_N を λ_1, λ_2 を用いて表せ．

(d) 粒子 1 個あたりのヘルムホルツの自由エネルギーの $N \to \infty$ の極限 f を J と h の函数として求めよ．

(e) スピンの期待値

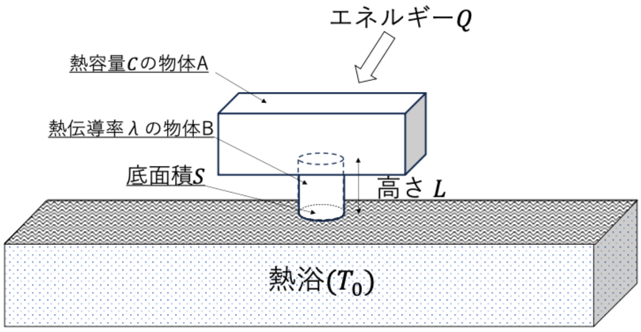
$$\langle\hat{s}\rangle = \left\langle\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{s}_i\right\rangle$$

の $N \to \infty$ の極限を f を用いて表せ．

(f) $\beta h \ll 1$ のときのスピンの期待値を J と h を用いて表せ．また，βJ を有限として $\beta h \to 0$ としたときの極限と $\beta J \to \infty$ の極限をとってから $\beta h \to 0$ としたときの極限を，それぞれ求めよ．

5．以下の設問に答えよ．

(a) 図の様に，熱容量 C を持つ物体Aと，一定温度 T_0 に保った熱浴が，熱伝導率 λ の物質でできた円柱状物体B（底面積 S，高さ L）の二つの底面で熱的に接触している．物体Aからの熱の出入りは物体Bを通じた熱浴との熱伝導だけであるとする．



図

物体A，物体Bおよび熱浴が熱平衡の状態の時，物体Aに瞬間的にエネルギー Q が入ったとする．そのエネルギーが物体A中で熱に変換されて熱平衡となる時間（緩和時間）が，物体Bを通した熱浴との熱伝導による熱の出入の時間に比べて十分短い場合，物体Aは入ったエネルギーに相当する温度上昇を示す．その後，物体Aから物体Bを通して熱浴に熱が伝わり，やがて物体Aは熱浴と同じ温度になる．この時，物体Bを通した熱の伝わり方は，物体B内の高さ方向の温度勾配が一定と仮定して熱伝導率 λ を使って表すことができるとする．また，物体Aの温度変化は小さく熱伝導率は定数と近似でき、熱浴は十分大きく物体Aやその他の影響を受けないとする．

ここで，熱伝導率とは，物質の単位長さの両端に単位温度の差がある時，その物質の単位面積を通して，1秒間に流れる熱の流量を表す．熱容量とは，考えている物体を単位温度上昇させるために必要なエネルギーを表す．

物体Aにエネルギー Q が入り物体A中で熱平衡になった時刻を $t=0$ とし，$t>0$ での物体Aの温度 $T(t)$ を，時間の関数として求めよ．また，$t>0$ の範囲で，横軸時間，縦軸温度のグラフを，時間スケールや，温度の情報もわかる様に書け．

(b) 原理の異なる温度計の例を2例あげ，その原理を説明せよ．

(c) 設問(a)の様に，液体窒素や液体ヘリウム等を使った熱浴を準備して，ある物体を冷やし，その物体に放射線を当てて温度情報を測定する実験をしたい．実験をうまく遂行するため，あるいは実験結果を検討する時必要と思われる注意事項を2例，および，人の安全を確保するための注意事項を2例，簡潔に記述せよ．

６．測定の不確かさに関する以下の設問に答えよ．

(a) 加速度 a を $\sigma_a = 0.1\ \mathrm{mm/s^2}$ の不確かさで計測できる加速度計があり，毎秒 10 回の測定を行う事ができる．これを用いて，標高の異なる A 点，B 点で重力加速度を計測する．

A 点と B 点での重力加速度の差を $0.01\ \mathrm{mm/s^2}$ 以下の不確かさで測定する為には，実験計画として A 点，B 点それぞれで最低何秒間の測定が必要か．不確かさは 1σ の信頼区間で定めるものとする．但し，測定中は測定条件が一定であり，A 点と B 点で同じ時間の測定を行うものとする．

(b) 地表面での重力加速度 $g \pm \sigma_g$，地球の半径 $R \pm \sigma_R$，万有引力定数 $G \pm \sigma_G$ を実測した．これらを用いて地球の質量 $M \pm \sigma_M$ を求めよ．但し，$\sigma_g, \sigma_R, \sigma_G, \sigma_M$ はそれぞれの不確かさであり，地球は密度が一定の球体であるとみなす．