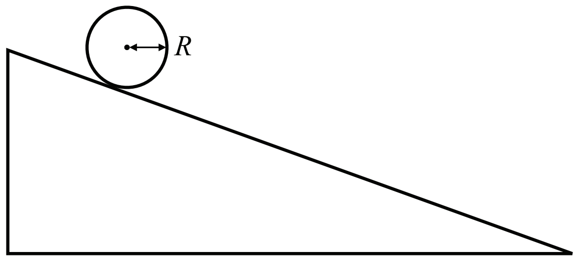
2022年2月実施

２０２２年度
理学研究科物理学専攻博士課程前期課程
入学試験問題（物理学）

［注意］

- 配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ.
- 大問は6問.
  ・理論物理学研究室を第１志望とする場合は大問１ ～ ４の４問を解答せよ.
  ・原子核放射線物理学研究室，または宇宙地球系物理学研究室を第１志望とする場合は，大問１ ～ ６のうち，４問を選択して解答せよ.
- 大問1問につき解答用紙1枚を用い，解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ.
- 解答用紙が4枚配られていることを確認せよ．そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること.
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること.

1. 図のように，半径 R，質量 M の一様な密度の円柱が斜面上にある．重力加速度を g として，以下の問いに答えよ．



図

(a) 円柱の回転軸（中心対称軸）の周りの慣性モーメント I_0 を計算せよ．

(b) 最初，円柱が静止した状態にいる．それから円柱は回転を始め，高さ H だけ斜面を滑らずに転がり降りたときの円柱の中心の斜面方向の速さ v_H を求めよ．

(c) 斜面に摩擦がなく円柱が転がらずに H だけ滑り降りたときの速さ v_1 を求め，v_H と v_1 の大小関係について定性的に説明せよ．

2. 真空中を伝搬する電磁波を考える．電磁波の電場及び磁場の振幅ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{E}_0$，$\boldsymbol{B}_0$，波数ベクトル及び角振動数をそれぞれ $\boldsymbol{k}$，ω とする．真空の誘電率及び透磁率をそれぞれ ϵ_0，μ_0 とする．以下の問いに答えよ．

(a) 電磁波の電場及び磁場をそれぞれ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ とする．それらを $\boldsymbol{E}_0$，$\boldsymbol{B}_0$，$\boldsymbol{k}$，ω を使って表せ．

(b) (a) で求めた電磁波がマクスウェル方程式を満たすために，$\boldsymbol{E}_0$，$\boldsymbol{B}_0$，$\boldsymbol{k}$ の方向に課される条件，$|\boldsymbol{k}|$ と ω の関係に課される条件，$|\boldsymbol{E}_0|$ と $|\boldsymbol{B}_0|$ の関係に課される条件を示せ．

(c) 電磁波の伝搬速度 c を ϵ_0，μ_0 を使って表せ．

(d) (a) で求めた電磁波が運ぶエネルギーの流れ（ポインティングベクトル $\boldsymbol{J}$）の大きさを $|\boldsymbol{E}_0|$，$|\boldsymbol{B}_0|$，$|\boldsymbol{k}|$，ω，ϵ_0，μ_0 の中から適当なものを使って表せ．

3. 量子力学における1次元調和振動子

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \qquad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

を考える．生成・消滅演算子を

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{p}, \qquad \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{p}$$

によって定義する．

(a) 演算子 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ を定義するとき，ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \alpha\hat{N} + \beta$$

と表すことができる．定数 α と β を求めよ．

(b) 交換関係 $[\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^k] = k(\hat{a}^\dagger)^{k-1}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ を数学的帰納法を用いて証明せよ．

(c) 量子状態 $|n\rangle$ を

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

によって定義する．ここで $|0\rangle$ は $\hat{a}|0\rangle = 0$ を満たす量子状態である．このとき

$$\hat{a}|n\rangle = r_n |n-1\rangle$$

となる定数 r_n を求めよ．

(d) 複素数 z に対して，次のような状態を考える．

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

この状態は消滅演算子 $\hat{a}$ の固有状態である．その固有値を求めよ．

4. 正方行列 A の i 行 j 列の成分を A_{ij} と書く．2 次の正方行列 A と B のテンソル積 $A \otimes B$ を

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B \\ A_{21}B & A_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

で定義する．次のような 2 つの行列を導入する．

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) ある有限準位系を記述するハミルトニアン

$$H = -2JZ \otimes Z - h(Z \otimes I + I \otimes Z)$$

について考える．ここで J と h は定数である．H を行列の成分表示で表わせ．

(b) この系の分配関数

$$Z_2(\beta, J, h) = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}$$

を β, J, h の関数として表わせ．行列 X の指数関数 e^X は

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

によって定義される．

(c) J と h を正の定数とするとき，

$$-\lim_{\beta \to \infty} \frac{1}{\beta} \ln Z_2(\beta, J, h)$$

を計算せよ．

(d) 次に別の有限準位系について考える．N を自然数，J を正の定数として，系の分配関数が

$$Z_N(\beta, J) = (2\cosh \beta J)^N + (2\sinh \beta J)^N$$

で与えられるとき，この系の最低エネルギー固有値を求めよ．

(e) (d) で導入した系の最低エネルギーの縮退度を答えよ．

5. 以下の問いに答えよ．

(a) $A, B, C,$ は独立な測定量であり，それぞれ $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ の誤差を持つ．Z の誤差の割合 $\dfrac{\Delta Z}{Z}$ を求めよ．p, q, r は誤差を持たない定数である．

i. $Z = \dfrac{pA^2B}{qC^3}$

ii. $Z = e^{rA}$

iii. $Z = A\ln(B)$

(b) ある放射線源から放出される放射線を計数管で 1 秒間計数したところ，144 個であった．この計数管の計数率を 1 %以下の相対精度で測定するためには何秒以上計数をすればよいか，有効数字 2 桁で求めよ．ただし，測定時間内の放射線の強度の減衰は無視できるとする．

6. 以下の問いに答えよ．

(a) 理想的な演算増幅器は増幅率が無限大，入力インピーダンスが無限大，プラスとマイナスの二つの入力端子の電位が等しいという性質を持つ．例えば図 1 のような演算増幅器を使った反転増幅回路の入力電圧 V_{in} と出力電圧 V_{out} の関係は，$V_{\mathrm{out}} + R_2 I = V_{\mathrm{in}} - R_1 I = 0$ より，$V_{\mathrm{out}} = -(R_1/R_2)\,V_{\mathrm{in}}$ となる．ただし I は抵抗 R_2 を流れる電流，R_1, R_2 は抵抗の大きさを表す．

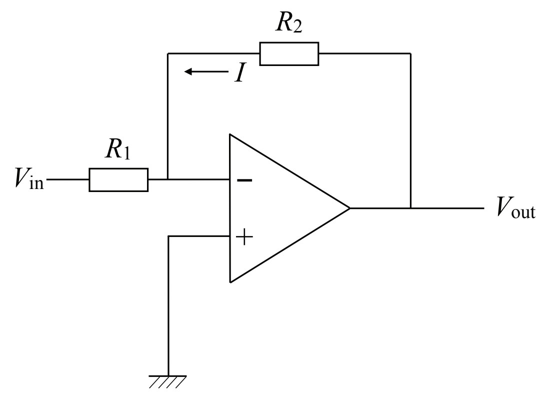


図 1

図 2 に示す演算増幅器を使った回路の出力電圧 V_{out} を，入力電圧 $V_{\mathrm{in}+}, V_{\mathrm{in}-}$ と R_1, R_2, R_3, R_4 を使って表せ。ただし，R_1, R_2, R_3, R_4 は抵抗の大きさを表す．

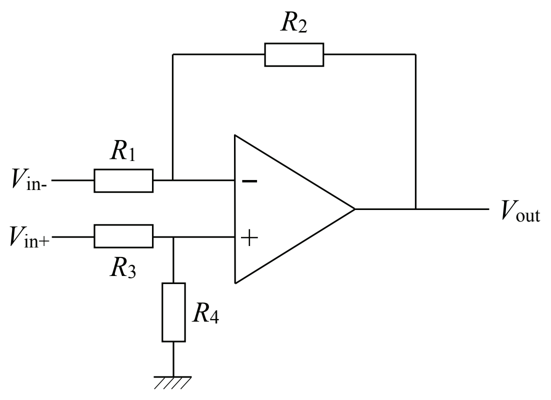


図 2

(b) 表 1 にあげた 3 種類の真空計の測定圧力範囲と測定原理について，それぞれ表 2 の A 群，B 群より当てはまる数値または説明の記号を選んで表 1 を完成させよ．

表 1

真空計の種類	測定圧力範囲	測定原理
電離真空計		
隔膜真空計		
ピラニ真空計		

表 2

記号	A 群	B 群
a	$10^{-8} \sim 10^{-1}$ Pa	機械的に圧力を測定する．
b	$10^{-1} \sim 10^{3}$ Pa	イオン電流から圧力を測定する．
c	$10^{-2} \sim 10^{5}$ Pa	熱伝導から圧力を測定する．

(c) 地球軌道で太陽に正対する単位面積に降り注ぐ太陽放射の総量を S とする．地球に降り注ぐ太陽放射エネルギーのうち，地球によって反射されて宇宙空間に散逸するエネルギーの割合をアルベドと呼び，A と表す．地球が吸収した太陽放射エネルギーが，一様な温度の黒体と見なした地球から宇宙空間に放出される赤外放射エネルギーと等しいとしたとき，その温度を有効放射温度と呼び，T_e と表す．地球の半径を R，ステファンーボルツマン定数を σ とする．

i. 地球が吸収する太陽放射エネルギーと，有効放射温度の黒体が宇宙空間に放出する赤外放射エネルギーのつり合いの式を書け．

ii. $S = 1.37 \times 10^{3}$ Wm^{-2}，$T_e = 250$ K，$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ Wm^{-2}K^{-4} のとき，地球のアルベド A を有効数字 2 桁で求めよ。