

2023年度

理学研究科物理学専攻博士課程前期課程

入学試験問題（物理学）

[注意]

- 配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ。
- 大問は6問。
 - 理論物理学研究室を第1志望とする場合は大問1から4の4問を解答せよ。
 - 原子核・放射線物理学研究室、または宇宙地球系物理学研究室を第1志望とする場合は、大問1から6のうち、4問を選択して解答せよ。
- 大問1問につき解答用紙1枚を用い、解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。
- 解答用紙が4枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。

1. 図のように、長さ R の軽い糸の先に質量 m の小球をつけた振り子の、糸が張った状態での鉛直面内の運動を考える。ただし、重力加速度の大きさを g とし、糸の受ける空気抵抗は無視してよい。以下の問いに答えよ。

まず、小球の受ける空気抵抗を無視できる場合を考える。

- (a) この振り子の運動方程式を、 θ に関する微分方程式として具体的に書き下せ。

以下の問いでは $|\theta| \ll 1$ として角度 θ に関して 1 次までの近似で扱えるものとする。

- (b) 前問の運動方程式は単振動を表す形となるが、その角振動数 Ω_0 を求めよ。

次いで、小球の受ける空気抵抗を考慮する場合を考える。

- (c) 小球 m の速度が $\dot{\theta}$ の時、空気抵抗力が $-\rho\dot{\theta}$ と書けるとする (ρ は正の定数)。この時、運動方程式を書け。解答は g を使わず必要に応じて Ω_0 を含めて表せ。

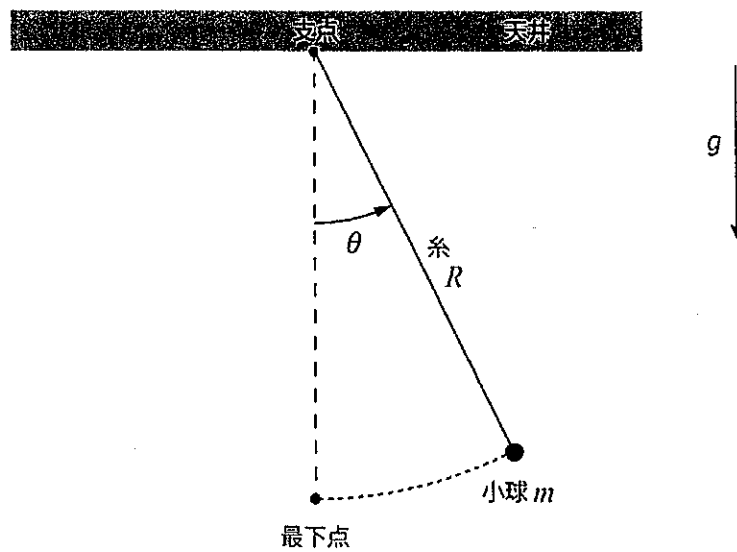
- (d) 前問に加えて、外力による支点回りの周期的なトルク $a \cos \Omega t$ が時刻 t に、 θ の正の向きにはたらく場合を考える。 a はトルクの次元を持つ定数、 Ω は角振動数を表す定数である。この時、運動方程式を書け。解答は g を使わず必要に応じて Ω_0 を含めて表せ。

- (e) 一般に時間 t の関数 $x(t)$ が微分方程式 $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t$ を満たすとき、これには特殊解 $x_p(t) = D \cos(\omega t - \delta)$ があり、

$$\tan \delta = \frac{2\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \dots (1), \quad D = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \quad \dots (2)$$

である。ここで $\beta, \omega_0, \omega, A$ は定数であり、この微分方程式はよく知られた強制振動の運動方程式が満たすものである。前問の運動方程式において、角振動数 Ω を様々な値に変える場合を考える。この時、特殊解 $x_p(t)$ に対応する $\theta(t)$ の解の振動の振幅を最大にする Ω を共鳴振動数 Ω_R と呼ぶ。共鳴が起きる条件 $dD/d\Omega|_{\Omega=\Omega_R} = 0$ を満たす Ω_R の値と、共鳴が起きる為に ρ が満たすべき条件を、 g を使わず必要に応じて Ω_0 を含めて表せ。

(f) 前問で特殊解 $x_p(t) = D \cos(\omega t - \delta)$ を微分方程式に代入する事により, 式 (1) が成り立つことを示せ.



図

2. 正の電荷 q 及び負の電荷 $-q$ を持つ 2 つの点電荷が z 軸上のそれぞれ $z = d/2$ 及び $z = -d/2$ に固定されている。以下の問いでは、電気双極子モーメントの大きさ $p = qd$ の電気双極子が原点にあると見なせる場合について考える。この電気双極子が作る電位 $\phi(\mathbf{r})$ は以下の式で与えられる。

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

ただし、直交座標系と極座標系の関係は

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

で与えられ、真空の誘電率を ϵ_0 とする。次の問いに答えよ。

- (a) はじめに正の電荷 q を持つ点電荷が z 軸上の $z = d/2$ に固定されていて、負の電荷 $-q$ を持つ点電荷を無限遠から z 軸上の $z = -d/2$ の位置までゆっくりと移動させて上記の配置になったとき、負の点電荷に対して外力がした仕事を求めよ。
- (b) この電気双極子が作る電場の r 成分と θ 成分を求めよ。
- (c) 原点から十分に離れた位置 $\mathbf{r}' = (x', 0, z')$ に電荷の大きさが Q の点電荷を置いた。この点電荷が作る電場によってこの電気双極子が受ける力 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ と原点回りのトルク $\mathbf{N} = (N_x, N_y, N_z)$ の各成分を求めよ。

3. 1次元空間中の質量 m の点粒子の量子力学を考える。ポテンシャルは

$$V(x) = +\infty \quad (x \leq 0), \quad \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} x^2 \quad (x > 0)$$

(α は正の定数)で与えられるものとする。

(a) エネルギー固有値 E を持つ定常状態の波動関数を $\psi(x)$ とし、 $\psi(x) = f(x)e^{-\alpha x^2/2}$ とおく。Schrödinger 方程式から、 $x > 0$ で $f(x)$ が従う微分方程式を導け。

(b) $f(x)$ が

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

という級数の形に書けると仮定する。係数 a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$)が満たす漸化式を導け。

(c) 仮にこの級数が途中で途切れないとすると、 $n \gg 1$ における a_n のふるまいから、 $x \rightarrow \infty$ で $\psi(x) = f(x)e^{-\alpha x^2/2} \sim e^{+\alpha x^2/2}$ となることがわかる。このような波動関数は規格化できない。この考察と $x = 0$ における境界条件に注意して、エネルギー固有値を求めよ。

(d) 規格化された基底状態の波動関数を求めよ。ただし、積分公式

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$$

を用いてもよい。

4. 理想量子気体の統計力学を考える。分配関数は

$$Z(\beta, V, N) = \sum_{\{n_i\}} \exp\left(-\beta \sum_i \varepsilon_i n_i\right)$$

で与えられる。ただし、 $\beta = 1/k_B T$, k_B はボルツマン定数, T は系の温度, V は系の体積, N は系の全粒子数である。 ε_i は1粒子量子状態 $i (= 1, 2, \dots)$ のエネルギー, n_i は1粒子量子状態 i にある粒子数であり, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots$ とする。和 $\sum_{\{n_i\}}$ は、条件 $\sum_i n_i = N$ のもとで可能な全ての n_1, n_2, \dots について取る。

(a) まず, 理想フェルミ気体について考える。

(a-1) 大分配関数

$$\Xi(\beta, V, \mu) = \sum_N Z(\beta, V, N) e^{\beta \mu N}$$

(μ は化学ポテンシャル)が

$$\Xi = \prod_i [1 + e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}]$$

で与えられることを示せ。

(a-2) 1粒子量子状態 i にある粒子数の期待値 $\langle n_i \rangle$ を求め, 十分低温における $\langle n_i \rangle$ の概形を ε_i を横軸に取って図示せよ。

(a-3) 1粒子のエネルギーが $\varepsilon = c|\mathbf{p}| = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$ (c は光速, $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ は運動量)で与えられる相対論的電子について, 1粒子状態密度 $D(\varepsilon)$ とフェルミエネルギー ε_F を求めよ。

(b) 次に, 理想ボース気体について考える。

(b-1) 大分配関数を求めよ。その際に, μ の上限値を書け。

(b-2) 1粒子量子状態 i にある粒子数の期待値 $\langle n_i \rangle$ を求めよ。

すべての出願者が理論物理学研究室を第 1 志望としているため、大問 5 及び 6 は配布しない。

