

2023年度

理学研究科物理学専攻博士課程前期課程

入学試験問題（物理学）

[注意]

- 配られた全ての解答用紙に受験番号を記入せよ。
- 大問は6問。
 - 理論物理学研究室を第1志望とする場合は大問1から4の4問を解答せよ。
 - 原子核・放射線物理学研究室，または宇宙地球系物理学研究室を第1志望とする場合は，大問1から6のうち，4問を選択して解答せよ。
- 大問1問につき解答用紙1枚を用い，解答用紙の左上に大問の番号を記入せよ。
- 解答用紙が4枚配られていることを確認せよ。そうでない場合は挙手して試験監督者に伝えること。
- 質問がある場合は挙手して試験監督者に伝えること。

1. 鉛直平面内の2重振り子の運動について考える. 図のように質量 m の2つの小球が長さ l の軽い糸で, 固定された支点から順につるされており, 糸が緩まない状態で微小振動している. 図のように鉛直方向からの糸の傾き角を $\varphi_1(\ll 1)$ と $\varphi_2(\ll 1)$ とし, また重力加速度の大きさを g とする. 以下の設問に答えよ.

(a) 小球1と小球2それぞれの運動エネルギーを書け.

(b) 小球1と小球2それぞれのポテンシャルエネルギーを書け.

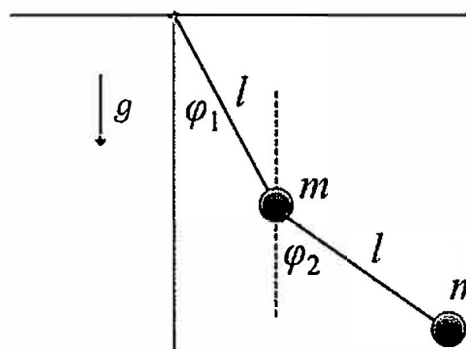
(c) この系のラグランジュの運動方程式を示し, 微小振動では近似的に,

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{2g}{l}\varphi_1 - \frac{g}{l}\varphi_2 = 0$$

$$\ddot{\varphi}_2 - \frac{2g}{l}\varphi_1 + \frac{2g}{l}\varphi_2 = 0$$

の2式が成り立つことを示せ.

(d) この系の微小振動を固有モードに分解して考える. それぞれの固有モードの固有角振動数を求めよ. また, それぞれの固有モードで小球1と小球2がどのように運動するか, 簡潔に記述せよ. 図を用いても良い.



天井に近い球を小球1, 遠い球を小球2とする。

図

2. xyz 空間に置かれた閉電流回路の磁氣的性質について考える. B は z 軸の正の向きの一様な磁場の磁束密度の大きさとして, 以下の設問に答えよ.

- (a) 1 辺の長さが b の正方形型の定常電流 J を考える. 図 1 のように中心が原点にあり, xy 平面から角度 θ 傾いて置かれている. 磁束密度の大きさが B の磁場がかけられているとき, この正方形型電流にはたらく y 軸のまわりのトルクの大きさを求めよ.
- (b) 符号の異なる 2 つの単磁荷が磁気双極子を作っているものと考え. 単磁荷 M は磁束密度の大きさが B の磁場中に置かれると, 磁場の方向に MB の大きさの力を受けるものとする. 2 つの単磁荷 $+M, -M$ が距離 l 離れているとき, この磁気双極子の磁気モーメント $\vec{\mu}$ は $-M$ から $+M$ に向かう向きで, 大きさが $\mu = |\vec{\mu}| = Ml$ であるものと定義する. 今, 磁気双極子が図 2 のように xz 平面内で z 軸から角度 θ 傾けて置かれている. この磁気双極子にはたらく y 軸のまわりのトルクの大きさを, μ を用いて表せ.
- (c) (a) と (b) のトルクが同じ値になるとき, (a) の正方形型電流は (b) の磁気双極子と同じ磁気モーメントを持つものとみなせる. このとき, 正方形型電流の磁気モーメントの大きさが「閉平面回路の面積 S と電流 J の積」で得られることを示せ. 同様に, 円形の電流の作る磁気モーメントの大きさも SJ で求められるものとして, 半径 a の円周上に定常電流 J が流れている円環電流の磁気モーメントの大きさを求めよ.
- (d) 総電荷 q ($q > 0$), 総質量 m が円周上に一様な密度で分布した円環状の物体を考える. 図 3 のように原点に中心があり xy 平面内に置かれた円環物体が z 軸のまわりに一定の角速度で回転しているとき, これを円環電流とみなすことができる. このとき, z 軸まわりの角運動量を L として, 磁気モーメントと角運動量の大きさの比 $\gamma = \mu/L$ を求めよ.
- (e) (d) の円環物体を電荷 q をもつ小物体とみなし, 図 4 のように原点に置く. これに磁束密度の大きさが B の磁場中で y 軸方向に初速度を与えると, 物体の中心が xy 平面内で等速円運動 (サイクロトロン運動) をする. その角速度 ω_c を求めよ. こ

の設問では磁気モーメントの影響は考えなくてよい。

- (f) 角運動量と磁気モーメントを持つ現実の物体は、円環電流とみなせるとは限らない。そのため、実際の磁気モーメント $\vec{\mu}'$ の大きさ μ' は回転する円環物体とみなした場合に (d) で考えた μ とは必ずしも一致しない。両者の比 $g = \mu'/\mu$ をこの粒子の g 因子と呼ぶ。一般に大きさが μ' の磁気モーメントと大きさが L の自転角運動量を持つ物体は、磁束密度の大きさが B の一様磁場の中に置かれると、磁気モーメントが角速度 $\omega_L = \frac{\mu' B}{L}$ で磁場の向きのまわりに歳差運動を行うことが知られている。すなわち、図4のように、磁気モーメントをもった小物体がサイクロトロン運動をするときは、 z 軸の向きのまわりに歳差運動をする。今、歳差運動とサイクロトロン運動の角速度の向きと大きさが一致する、磁気モーメントと自転角運動量をもつ粒子があったとする。その粒子の g 因子を求めよ。また、 g 因子の値がこれより1%大きい値を持つ別の粒子が、サイクロトロン運動により一周して原点に初めて戻ってきたとき、磁気モーメントが y 軸となす角度の大きさを求めよ。ただし、磁気モーメントははじめ、 y 軸の正の方向を向いていたものとする。

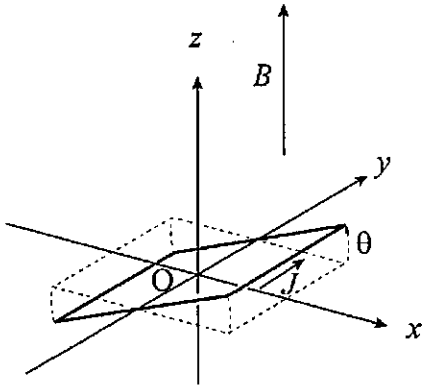


図 1

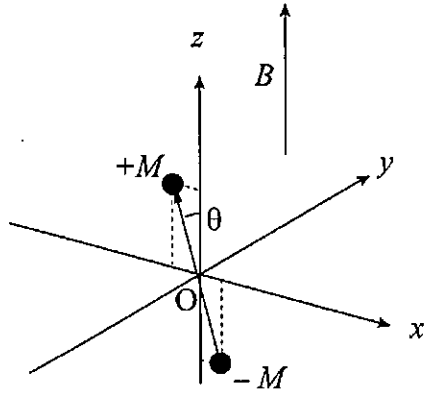


図 2

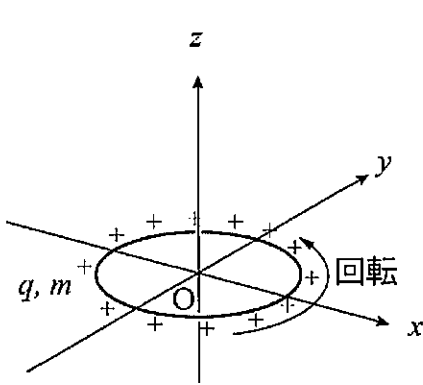


図 3

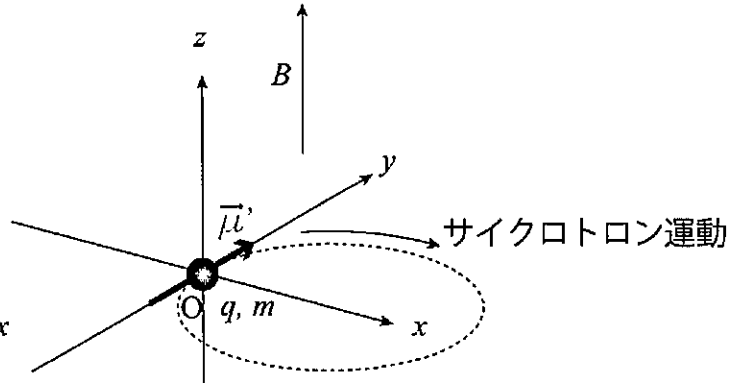


図 4

3. 図のように、質量 m の粒子が無限に高い障壁により $-a \leq x \leq a$ に束縛され、 $-a < x < a$ でポテンシャルが $\lambda\delta(x)$ ($\lambda \geq 0$) で与えられる1次元量子系を考える。ただし、 $\delta(x)$ はデルタ関数である。以下の設問に答えよ。

(a) $\lambda = 0$ の場合に、基底状態と第1励起状態のエネルギー固有値と規格化された波動関数を求めよ。

(b) $\lambda \neq 0$ の場合に $\lambda\delta(x)$ を摂動論で取り扱うことを考える。基底状態と第1励起状態のエネルギー固有値に対する摂動の1次 (λ の1次)の補正 $\Delta E_0^{(1)}, \Delta E_1^{(1)}$ を求めよ。

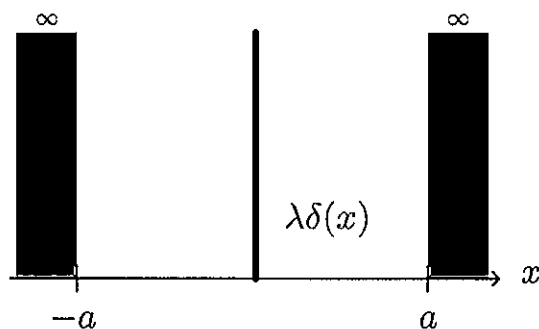
(c) $\lambda \neq 0$ の場合に、 $\lambda\delta(x)$ を摂動論でなく厳密に取り扱うことを考える。このときの基底状態と第1励起状態のエネルギー固有値をそれぞれ $E_0(\lambda), E_1(\lambda)$ と書くことにする。

(c-1) $E_0(\lambda)$ は以下の式により決定されることを示せ。

$$\tan(ka) = -\frac{\hbar^2}{m\lambda a} \cdot ka, \quad k := \frac{\sqrt{2mE_0(\lambda)}}{\hbar}$$

(c-2) $E_1(\lambda)$ を決定せよ。

(c-3) (c-1)と(c-2)を踏まえ、横軸を λ ($0 < \lambda < \infty$)として同じグラフに $E_0(\lambda)$ と $E_1(\lambda)$ の概形を描け。 $E_0(\lambda \rightarrow \infty)$ の値を記すこと。また、摂動論が破綻する λ の大きさを評価せよ。



図

4. 統計力学に関する以下の設問に答えよ.

(a) 磁場 h の中に置かれた N 個のスピンは, スピン間に相互作用がないときには, 以下のハミルトニアンを持つ.

$$\mathcal{H} = -h \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

ここで, スピン変数 σ_i は ± 1 の値を取る.

(a-1) この系の分配関数を計算せよ.

(a-2) この系のエントロピーを T (または $\beta := 1/k_B T$), N, h を用いて表せ. (なお, ボルツマン定数 $k_B = 1$ の単位系を用いても構わない.)

(a-3) この系を断熱し, 磁場を h_1 から h_2 まで十分にゆっくり変化させたところ, 温度は T_1 から T_2 に変化した. T_2 を T_1, h_1, h_2 を用いて表せ. そうなる理由も説明せよ.

(b) 磁場 h の中に置かれた $N = 3$ 個のスピンが相互作用しており, 以下のハミルトニアンを持つとする.

$$\mathcal{H} = -h \sum_{i=1}^3 \sigma_i - J(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)$$

(b-1) この系の分配関数を計算せよ.

(b-2) 一つのスピン変数の期待値 $\langle \sigma \rangle$ を計算せよ. また, J の正負に注意しながら, $|\beta J| \gg 1$ における $\langle \sigma \rangle$ を求めよ.

(b-3) 磁化率 $\chi = \lim_{h \rightarrow 0} \partial \langle \sigma \rangle / \partial h$ を計算せよ.

5. 次の文を読み, (a)-(c)の設問に答えよ.

図1のように検出面の小さい検出器から離れた位置に, 円形の穴があいた板が置いてある. ここで, 検出面の中心と穴の中心を結ぶ直線は検出面と板に対して垂直である. また, 検出面の中心と穴の中心を結ぶ直線と検出器中心と穴の端の1点を結ぶ直線のなす角を θ_0 とする.

(a) この検出器から, 板にあいた穴を見込む立体角を求めよ.

次に, 図2のように, この検出器から距離 d_1 離れた位置に, 半径 r_1 の円盤形の, 輝度(単位面積あたり, 単位立体角あたりの光出力)が一様な平面単色光源1を設置した. 光源1の中心と板の穴の中心と検出面の中心は同一直線上にあり, この直線に対し光源1の面は垂直である. 光源を点灯している状態での検出器の出力は a_1 であった.

次に, 光源1を取り外し, この検出器から距離 d_2 離れた位置に, 半径 r_2 の円盤形であり, 輝度が一様と分かっている平面単色光源2を設置し点灯したところ, 検出器の出力は a_2 であった. 光源2も光源1を測定した時と同様に, 光源2の中心と板の穴の中心と検出面の中心は同一直線上にあり, この直線に対し光源2の面は垂直である. ここで, 検出器の出力は検出面に入射した光量に比例するものとし, 検出面と板の間の距離や板の穴の半径は, 光源との距離や光源の半径より充分小さいものとする. また, 光源から検出器には板にあいた穴を通った光のみが届くものとし, 周辺の散乱光などは無視できるものとする.

(b) $\tan \theta_0 < r_1/d_1$ かつ $\tan \theta_0 < r_2/d_2$ の場合, 光源1と光源2の輝度の比を求めよ.

(c) $\tan \theta_0 > r_1/d_1$ かつ $\tan \theta_0 > r_2/d_2$ の場合, 光源1と光源2の輝度の比を求めよ.

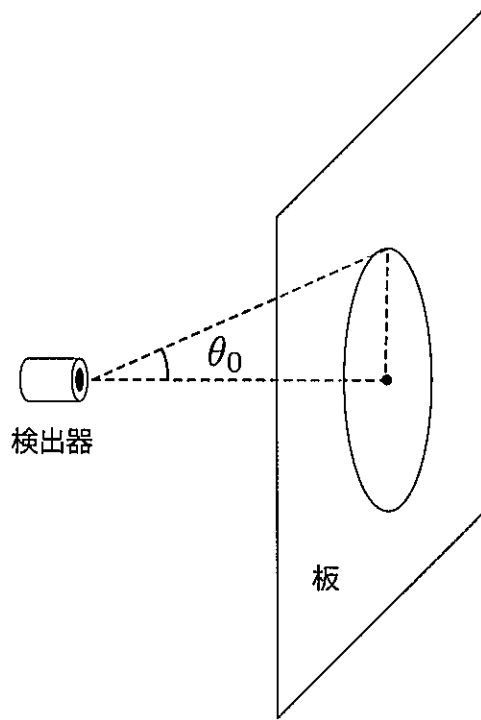


图 1

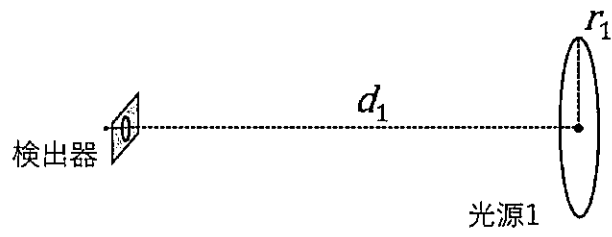


图 2

6. 実験で得られる測定量の不確かさに関する以下の設問に答えよ.

(a) 不確かさを含む測定量 $m \pm \sigma_m$, $n \pm \sigma_n$ を考える. m, n で表される量 $A = \frac{m-n}{m+n}$ の不確かさ σ_A を, 誤差伝播を用いて求めよ. 但し, m と n は互いに独立な測定量であるものとする.

(b) (a)で, m, n はそれぞれ異なる条件で同じ時間測定された放射線の個数であるとする. これがポアソン分布に従うと考えた場合, A の統計誤差 σ_A を, σ_m, σ_n を用いずに m, n で表せ. ここで, 統計誤差は 68.3%信頼区間を表すものとする. また, m, n の値は十分大きく, ポアソン分布はガウス分布と見なせると仮定してよい.

(c) (b)で, $|m - n| \ll m + n$ の場合を考える. $N = m + n$ とした時, m, n を用いず N だけで σ_A を近似的に表せ.